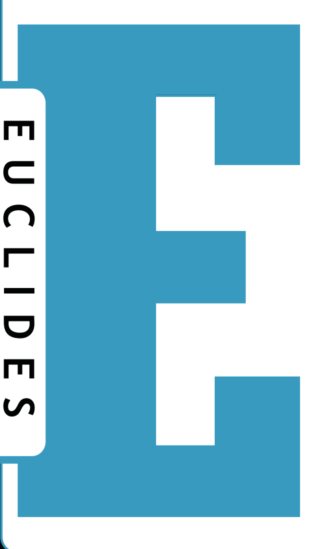
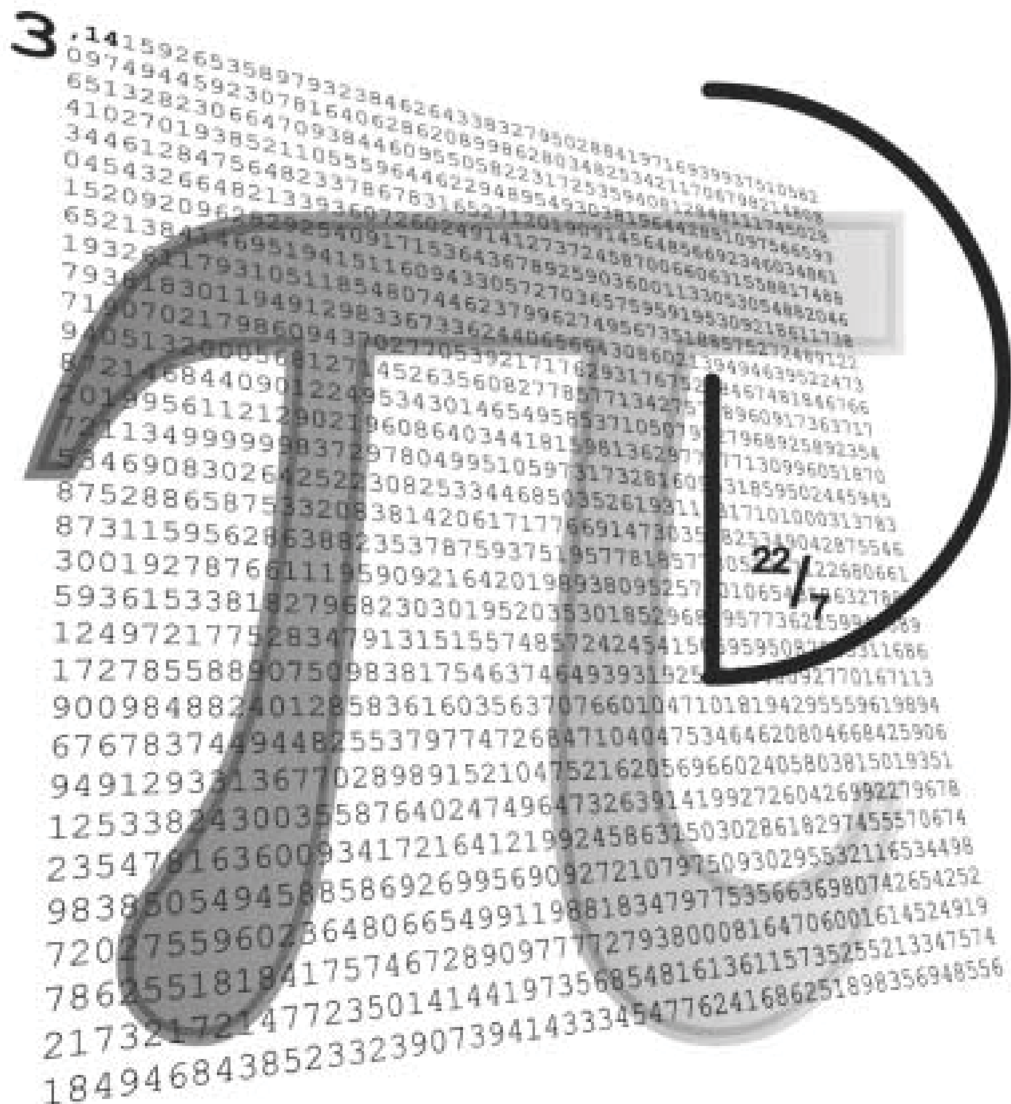
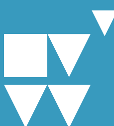
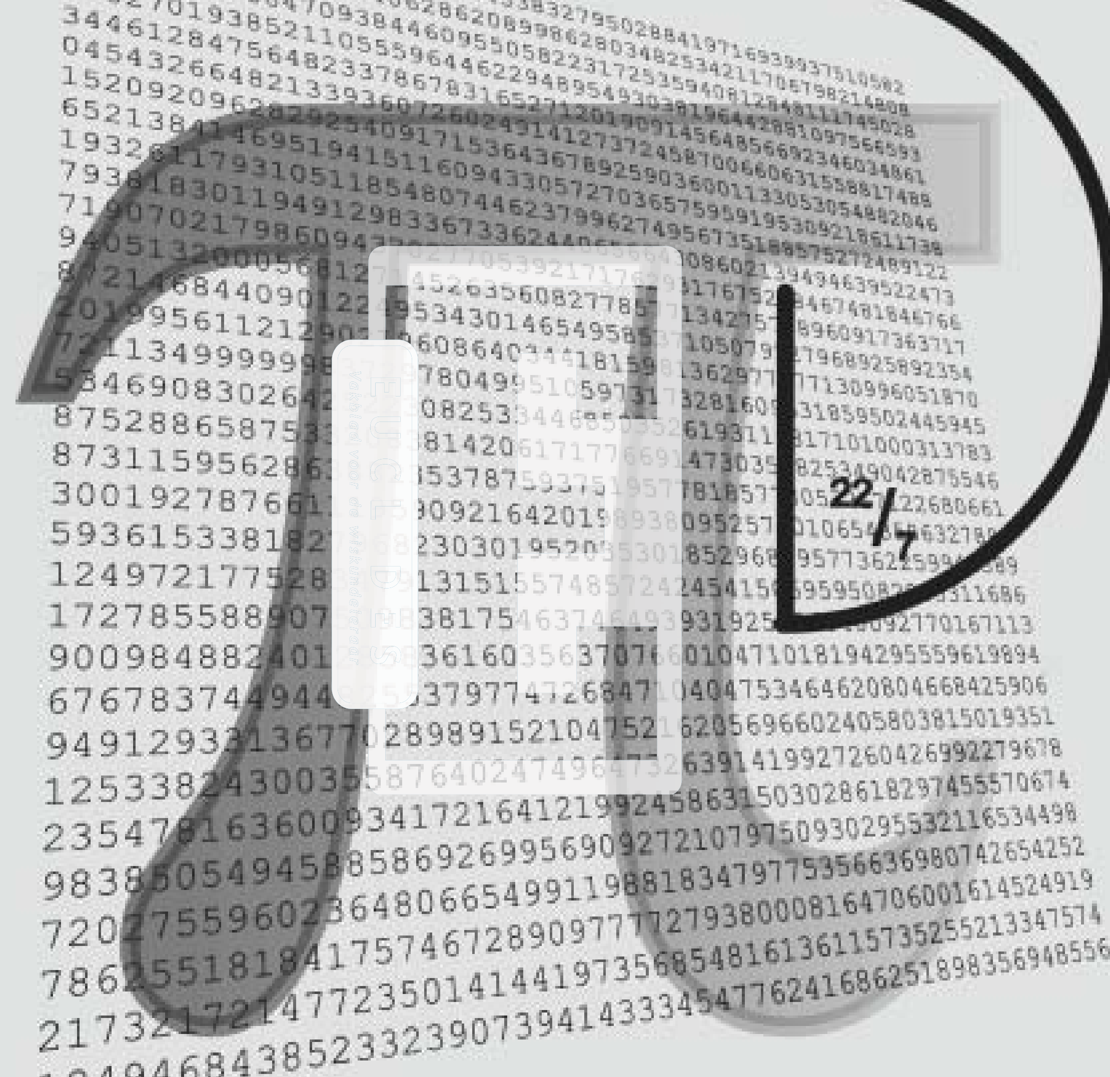


AANSLUITING VWO-TU
WWF EN ZAMBIA
BOEKBESPREKINGEN

maart
2006/nr.5
jaargang 81







Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

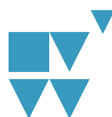
Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Houtsnip 22, 7827 KG Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19 , 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp   Groninger Ontwerpers
productie   TiekstraMedia, Groningen
druk   Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 46,50
Studentleden: € 26,50
Gepensioneerden: € 31,50
Leden van de VVWL: € 31,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 31,50
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

5

maart 2006   JAARGANG 81

INHOUD

Voorpagina: TrudiSigned, Krimpen aan den IJssel

Aan dit nummer werkten verder mee:

Van de redactietafel

[Marja Bos]

14 maart: π-dag

Met 'Nine Eleven' (9/11) wordt in de VS niet 9 november bedoeld, maar 11 september. Kwestie van notatie. Gezien de notatie 3/14 is het natuurlijk erg leuk om jaarlijks op 14 maart in de wiskundeles eens wat extra aandacht te schenken aan het getal π. Volgende week kunnen we er als wiskundeleraren al helemáál niet omheen, want het is dit jaar 300 jaar geleden dat de letter π als schrijfwijze voor dit bijzondere verhoudingsgetal werd geïntroduceerd. Meer informatie over Pi-Dag vindt u op p. 253 in een bijdrage van Dick Klingens.

Wiskunde B en D

Tegen de tijd dat u dit leest zal de mist inmiddels wel opgetrokken zijn, maar op het moment dat ik dit stukje schrijf moet de Tweede Kamer nog stemmen over het wetsvoorstel Tweede Fase en een aantal amendementen daarop. Wordt *wiskunde B* in het vwo inderdaad iets minder sterk ingesnoeid, namelijk tot *600* studielasturen in plaats van de eerder geplande 520 uur? (Op dit moment is de wiskunde-studielast voor vwo-NT 760 uur.) Is ook de studielast van wiskunde B in het havo nog wat bijgesteld? Wordt vanaf 2007 voorlopig inderdaad 100% in plaats van 60% van het B-programma centraal geëxamineerd? Zo in de allerlaatste fase van de besluitvorming duikelden de aanpassingen over elkaar heen…
Ook de contouren van *wiskunde D* beginnen zich voorzichtig af te tekenen.
Op initiatief van de vernieuwingscommissie cTWO werden een maand geleden enkele goed bezochte en geanimeerde veldraadplegingsbijeenkomsten over wiskunde D georganiseerd. Naast enthousiasme over de mogelijkheden was er bij de deelnemende docenten ook zorg: het gaat immers om een niet-doorstroomrelevant profielkeuzevak dat op lang niet elke school aangeboden zal worden. Bovendien lijkt het erop dat men via wiskunde D het 'wiskunde-B-probleem' probeert op te lossen: D als noodzakelijke versterking, voortzetting en verdieping van B. De gedeeltelijk schooleigen invulling (via keuzeonderwerpen) wordt door veel leraren omarmd, maar voor het *havo* werd het het keuzedeel nogal eens als te omvangrijk beoordeeld: 160 slu, dat is de helft van de studielast.
Zie voor nadere informatie *www.ctwo.nl*.

In dit nummer

Het openingsartikel beschrijft de resultaten van een instaptoets die aan de drie technische universiteiten is afgenomen bij eerstejaars studenten. Wat moet er gebeuren om de aansluiting te verbeteren?
Daarnaast ruim baan voor de boekbespreking: het zijn er dit keer zelfs vier! We plaatsen in Euclides regelmatig recensies van publicaties waarvan we denken dat ze interessant zijn voor wiskundedocenten. Suggesties ten aanzien van te bespreken boeken zijn altijd welkom – en u kunt natuurlijk ook zélf een bespreking voor Euclides schrijven!
Getallen lenen zich uitstekend voor onderzoek door leerlingen, zo laat Jack van der Elsen zien in een bijdrage over een bijzondere eigenschap van sommige getallenparen.
Het percentage meisjes in de 'harde' exacte richtingen in havo en vwo is er alleen maar kleiner op geworden sinds de invoering van de profielen, zo lezen we in het artikel van Annemarie van Langen.
Yvonne Killian en Lauran van Oers leveren praktische lestips.
Meetkunde komt aan de orde in bijdragen geschreven door Kees Jonkers en Jan van de Craats, Dirk Koolmees geeft informatie over de ondersteuning door het Wereldwiskunde Fonds van een Teachers Training College in Zambia, Harrie Broekman schrijft over het omzetten van alledaagse taal in wiskundetaal, en tot slot zijn er natuurlijk nog de vaste rubrieken.
Veel leesplezier!

AANSLUITING VWO EN TECHNISCHE UNIVERSITEITEN

Basiskennis en -vaardigheden wiskunde getoetst

[Werkgroep 3TU]

In september 2005 is bij de drie Technische Universiteiten een ingangstoets wiskunde voorgelegd aan de eerstejaarsstudenten. Getoetst werden de parate basiskennis en -vaardigheden van een zestal onderwerpen. Op deze onderwerpen wordt in het onderwijs aan de drie TU's vaak een beroep gedaan. De behaalde resultaten (zie Overzicht resultaten op pag. 244 e.v.) *maken duidelijk dat er een groot verschil is tussen de gewenste en de daadwerkelijke beheersing van die onderwerpen. Dit heeft geleid tot het aanbieden van aanvullend oefenmateriaal en ondersteunend onderwijs.*

Inleiding

In voorgaande jaren bleek uit diverse enquêtes[1] dat zowel de docenten als de studenten niet tevreden waren over de aansluiting van wiskunde op het vervolgonderwijs. Een grondige analyse van fouten die in de calculustentamens gemaakt werden, ondersteunt deze gevoelens van ontevredenheid met blote feiten. In het studiejaar 2004-2005 namen de drie TU's (TU Delft, TU Eindhoven, Universiteit Twente; verder 3TU genoemd) het initiatief om de activiteiten die er al bestonden om de tekorten in kaart te brengen, te bundelen en verder gezamenlijk op het punt van aansluiting op te trekken.

De toets, afname en vervolg

Allereerst werd gebrainstormd over welke basiskennis er toch op zijn minst verwacht mocht worden van de aankomende studenten. Het lijstje met voorbeeld-opgaven (zie Opgaven-1) stamt uit de beginperiode van de tweede fase, toen de TU Eindhoven zich oriënteerde op de gevolgen van de veranderingen in het vak wiskunde B12.[2]
Intussen zien wij in de studentuitwerkingen van calculus-tentamens en de instaptoetsen die in het hoger onderwijs worden afgenomen, dat zelfs de doelstellingen genoemd onder punt 2, 3, 4 en 10 niet meer gehaald worden. Wij spraken dan ook af de lat niet al te hoog te leggen.
Vervolgens hebben de 3TU in onderling overleg zes te toetsen onderwerpen vastgesteld:

1. oneigenlijke exponenten;
2. optellen en aftrekken, vereenvoudigen en omwerken van breuken;
3. eenvoudige eerste- en tweedegraads vergelijkingen;
4. logaritmen en exponenten;
5. goniometrie;
6. differentiëren en integreren.

De toets die de lichting van 2005 over deze onderwerpen is voorgelegd, is tot stand gekomen met medewerking van een vwo-docent. Aan de TUD en TU/e is de toets in meerkeuzevorm afgenomen. De UT koos ervoor om bij alle vragen een uitwerking te eisen, zodat studenten die door gokken of het invullen van getallen aan een juist antwoord probeerden te komen, door de mand vielen.
De bedoeling van de toets is in eerste instantie diagnostisch van aard. De uitslag verschaft de student inzicht in zijn beheersing van de stof en geeft aan in hoeverre hij al voldoet aan het gewenste niveau van beheersing.
Op de tweede plaats geeft de uitslag de universitaire opleiding inzicht in het niveau van hun publiek op dit gebied. Duidelijk wordt in hoeverre de student extra ondersteuning behoeft om zijn algebraïsche rekenvaardigheden en basiskennis te verbeteren, hetzij in de reguliere colleges, hetzij door het aanbieden van extra onderwijs.
Tenslotte kan de uitslag van de toets aanleiding geven tot discussie over het onderwijs op het vwo. Welk niveau mogen wij op basis van het huidige examenprogramma wiskunde B12 verwachten?
Moet het geconstateerde niveau van basiskennis en basisvaardigheden een rol spelen bij de vaststelling van het toekomstige examenprogramma en het bepalen van de rol van formulekaart en grafische rekenmachine in het middelbaar onderwijs?

Voorbeeldopgaven exameneisen rekenvaardigheden
Natuur & Techniek VWO

Geïsoleerd met pen en papier	In een context, met hulpmiddelen
1. bereken 3×40	bereken $2{,}345 \times 101{,}46$
2. vereenvoudig $\sqrt{80}$	vereenvoudig $(1026)^{\frac{1}{5}}$
3. schrijf $4x^2+12xy+9y^2$ als een kwadraat	schrijf $x^2+4xy+4y^2+6xz+12yz+9z^2$ als een kwadraat
4. ontbind in factoren: $4a^2-9b^2$	ontbind: $\frac{144a^2}{81}-\frac{145b^2}{2}$
5. schets de grafiek van $y=2x^2+5$	
6. schets de grafiek van $y=2\sin x$	
7. schets de grafiek van $y=-e^x$	schets de grafiek van $y=\sin x+e^x-x^2$
8. werk de haakjes weg: $(a^2-3b)(-3a+5b^2)$	werk de haakjes weg: $(3ab^2-5ab+7b^3)(37b^4-5a^2b-2a^3)$
9. los x op uit $x^2+5x+6=0$	los x op uit $x^3-4x^2+x+6=0$
10. los $\sin x$ op uit $12\sin^2 x-5\sin x-3=0$	los x op uit $12\sin^2 x-5\sin x-3=0$
11. schets de grafiek van $\sin(x-\frac{1}{3}\pi)$	schets de grafiek van $\sin^2 x-4\sin x$
12. etc.	etc.

Opgaven-1

Opgaven-2

Gemeenschappelijke opgaven 1975, 1987, 2005

Opgave 1 $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ *is gelijk aan*

antwoord	$\frac{^{10}\log 5}{^{10}\log 3}$	$\ln 5-\ln 3$	$\ln\frac{5}{3}$	$\ln 2$
2005	32	28	23	16
1987	53	33	4	9
1975	49	33	5	11

De score is nooit erg hoog geweest. Verschil is, dat de lichting in 2005 getraind is in het gebruik van een formulekaart. Indien het gebruik ervan toegestaan zou zijn bij het afleggen van de toets, zou er beter gescoord zijn. De vraag is wel of er een percentage boven de 50 gehaald zou zijn.

Opgave 2 $\cos\frac{2}{3}\pi$ *is gelijk aan*

antwoord	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
2005	33	32	22	10
1987	14	77	30	5
1975	13	80	2	5

Verminderde score als gevolg van de invoering van de grafische rekenmachine?

Opgave 3 $\cos 2a$ *is gelijk aan*

antwoord	$2\sin^2 a-1$	$1-2\cos^2 a$	$2\cos^2 a-1$	$\sin^2 a-\cos^2 a$
2005	31	28	19	16
1987	10	14	64	9
1975	7	10	72	10

Veelvuldig gebruik van een formulekaart heeft niet tot gevolg dat de formules tot parate kennis worden.

Opgave 4 $\sin(\frac{1}{2}\pi+x)$ *is gelijk aan*

antwoord	$\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
2005	57	21	10	9
1987	66	20	6	7
1975	62	23	6	8

In vergelijking tot de vorige vragen, is deze vraag niet eens zo gek beantwoord door de studenten uit 2005.

De voorgelegde opgaven vallen binnen de domeinen die op het Centraal Examen wiskunde B12 op het vwo getoetst worden, met andere woorden: ze hebben het allemaal gehad. De kennis van de student is op het vwo echter wel gedeeltelijk opgeslagen op de formulekaart. De vaardigheden die op de middelbare school zijn bijgebracht, steunen allemaal op het gebruik van die kaart en de grafische rekenmachine. Bij het maken van deze test is het gebruik van die hulpmiddelen niet toegestaan. Het gaat bij de toets om kennis en vaardigheden waarvan we vinden dat die zodanig vlot beheerst zouden moeten worden, dat daarvoor een beroep op formulekaart en grafische rekenmachine niet nodig zou moeten zijn. Een van de fundamentele verschillen in het onderwijs tussen vwo en universiteit is namelijk de snelheid waarmee de stof behandeld wordt. Het is de bedoeling dat de eerstejaars snel aan een hoger tempo gewend raken. Is het niveau van rekenvaardigheid te laag, dan kost het maken van opgaven in het eerste jaar te veel tijd, de essentie van de opgaven wordt niet meer gevat en afhaken is het gevolg. Dit geldt niet alleen voor wiskundevakken, maar zeker ook voor veel technische vakken.

De toets is op alle drie de universiteiten afgenomen in de eerste collegeweek, voor veel studenten hoogstwaarschijnlijk de eerste confrontatie met het vak wiskunde sinds drie en een halve maand.

De consequenties die aan het behaalde resultaat (zie Overzicht resultaten op pag. 244 e.v.) verbonden werden, zijn per opleiding verschillend. Hieronder volgt een opsomming.

- De toets is zuiver diagnostisch van aard afgenomen, aan een slechte score zijn geen directe consequenties verbonden. Het advies wordt gegeven om zelfstandig met behulp van aangeboden oefenmateriaal de vaardigheden op peil te brengen (Delft).
- Geen consequenties, maar wel het aanbod om gedurende vijf weken werkcolleges te volgen waarin met speciaal daarvoor ontwikkeld studiemateriaal[3] de vaardigheden op peil gebracht kunnen worden. Na deze vijf weken weer een toets om de vorderingen te meten (Twente en Eindhoven).
- Wel consequenties, namelijk de verplichting om gedurende vijf weken de hierboven genoemde werkcolleges te volgen. Na deze vijf weken een verplichte toets om de vorderingen te meten (sommige afdelingen in Twente en Eindhoven).

Resultaten

De toets in de eerste collegeweek is erg slecht gemaakt op de 3TU. Gemiddeld werd nog niet de helft van het aantal opgaven juist beantwoord. Ter illustratie zijn bij dit artikel de resultaten weergegeven van een aantal vragen die ook deel uit maakten van toetsen uit 1975 en 1987 (zie Opgaven-2).

De toets die na vijf weken oefening is afgenomen, is beter gemaakt, maar nog steeds niet goed genoeg naar onze mening. Opdat de lezer zelf kan oordelen is beginnend op pag. 244 van deze tweede toets een

uitgebreid verslag opgenomen. Mogen we daaruit concluderen dat een fundamenteel gebrek aan algebraïsch inzicht in vijf weken niet bij te spijkeren is?

Volgend jaar

Uit alle onderzoeken die in de afgelopen twee jaar gedaan zijn (inclusief de toetsen) is nu helder geworden dat er op kennisniveau tekorten zijn. Het rapport *Zeven jaar tweede fase, een balans*[4], dat afgelopen najaar verscheen, bevestigt dit nog eens. Dat aspect hoeft volgend jaar niet weer opnieuw onderzocht te worden. De diagnostische waarde van een instaptoets voor nieuwe lichtingen studenten blijft natuurlijk wel van belang.
Vanuit het hoger onderwijs worden er digitale diagnostische toetsen[5] ontwikkeld. De student kan hiermee opsporen in welke onderdelen zijn kennis tekortschiet en kan dan vervolgens zichzelf remediëren met digitaal oefenmateriaal toegespitst op die onderdelen.
De werkgroep 'Aansluiting wiskunde 3TU' blijft actief. Overwegingen voor komend jaar zijn:
1. Wel of geen instaptoets?
Vast staat al, dat als er weer een instaptoets komt,
- dan wordt dit tijdig aan de aankomende studenten medegedeeld. Dit jaar waren de studenten er niet op voorbereid. Gelukkig is de boosheid die er aanvankelijk was over deze 'overval' al na een paar collegeweken gezakt. Een aantal voor de toets geslaagde kandidaten hebben zelfs vrijwillig het aangeboden ondersteuningsonderwijs bezocht;
- dan is die toets diagnostisch bedoeld voor de student.
2. Wel of geen ondersteunend onderwijs?
In Twente wordt op dit moment een enquête gehouden onder de eerstejaarsstudenten om het ondersteunend onderwijs te evalueren. De vraag is onder meer of het fair is om de student geconstateerde hiaten

Overzicht Resultaten na vijf weken ondersteunend onderwijs

Deze toets is gemaakt door 261 studenten aan de Universiteit Twente. Van de 23 vragen zijn er gemiddeld 13 goed beantwoord (standaardafwijking 4,46). De toets is gepubliceerd in de WiskundE-brief nr. 360. Veel vwo-docenten hebben deze toets aan hun leerlingen voorgelegd of zijn dat van plan. Vandaar dat we ervoor gekozen hebben om de analyse van deze toets in dit artikel te publiceren. De eerste toets van september en de analyse daarvan zal in de WiskundE- brief gepubliceerd worden.
Hieronder zijn de 23 opgaven weergegeven met de antwoorden van de studenten. Bij de percentages is het goede antwoord grijs gekleurd.

Opgave 1 Welke van de volgende beweringen is/zijn goed:

A. $\frac{4}{5+2^{-2}}=\frac{16}{21}$ B. $(32)^{\frac{2}{5}}=4$ C. $(7\frac{1}{2})^2=49\frac{1}{4}$

antwoord	A en B	A	B	C	anders, bv. B en C
percentage	43	28	14	4	11

Toch nog 28 % heeft moeite met exponenten en 14% heeft moeite met breuken. En 15 % meent dat C goed is. Minder dan de helft geeft het goede antwoord. Zou het gemak waarmee naar de rekenmachine gegrepen wordt hier debet aan zijn?

Opgave 2. De uitdrukking $\frac{a^{1/3}}{a^{3/4}}$ is gelijk aan

antwoord	$a^{-5/12}$	$a^{4/9}$	$a^{5/3}$	$a^{1/4}$
percentage	88	7	3	2

Met letters gaat beter dan met getallen! De invloed van de GR??

Opgave 3 Vereenvoudig de volgende uitdrukking zover mogelijk:

$$\frac{(5ab^2)^2\cdot\sqrt[3]{8b^{-6}}}{5b^2\cdot\sqrt{a^4}}$$

antwoord	10
percentage	31

16 studenten wisten geen raad met $\sqrt[3]{8}$; 38 studenten dachten $\sqrt[3]{8b^{-6}}=8b^{-2}$; 9 studenten gaven als antwoord: $5b^2\sqrt[3]{8b^{-6}}$; 1 student gaf als antwoord: $5\sqrt[3]{8}$.

Opgave 4 Vereenvoudig de volgende breuk zover mogelijk $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

antwoord	$\frac{x-1}{x+1}$
percentage	45

Een te lage score.

Opgave 5 Als $\frac{1}{y}=x+\frac{1}{c}$, dan is y gelijk aan

A. $\frac{c}{cx+1}$ B. $\frac{1}{x}+c$ C. $\frac{c}{x+1}$ D. $\frac{c+1}{x+1}$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	38	42	13	1	7

42 % van de studenten neemt term voor term het omgekeerde! Het goede nieuws is dat in de eerste toets slechts 18% van de studenten een formule wist om te werken.

zelf te laten repareren. Sommigen vinden dit de verantwoordelijkheid van de student zelf, anderen vinden het veel sympathieker om ondersteuning te bieden. Het onderdeel ‘bekostiging’ van dit traject speelt in deze overwegingen ook een rol.

3. Hoe communiceren we met het voortgezet onderwijs? Er zijn nu al tal van scholen die aandacht besteden aan de instaptoets. We hebben via de WiskundE-brief verschillende toezeggingen, dat de toets binnenkort ook in 6 vwo afgenomen wordt. We gaan de resultaten daarvan analyseren.

4. Wat zijn veelvoorkomende fouten die gemaakt worden? Doordat in Twente alle antwoorden gemotiveerd moesten worden, hebben we een schat (nou ja, schat...) aan materiaal verzameld omtrent de typen fouten die door studenten met wiskunde B12 in het examenpakket toch nog gemaakt worden. Misschien kan een werkgroep gevormd worden die de fouten analyseert en rubriceert. Op die manier kan duidelijk worden aan welke aspecten binnen het vwo en het universitaire wiskundeonderwijs meer aandacht besteed moet worden teneinde de beheersing van algebraïsche vaardigheden te waarborgen.

5. Welke andere stappen kunnen we nemen om de aansluiting op dit gebied te verbeteren?

Aanbevelingen voor de toekomst

De retorische vraag is nu: willen we met zijn allen dat een vwo-gediplomeerde in het profiel N&T beter raad weet met het omwerken van formules, het vereenvoudigen van uitdrukkingen en dat hij minder afhankelijk is van hulpmiddelen?

1. In 2010 vinden de eerste examens nieuwe stijl plaats. Laat wiskunde B een pittig vak zijn dat voorbereidt op exacte studies. Er zijn vanaf 2007 weliswaar

Opgave 6 $\frac{1}{a^2b} - \frac{1}{b^2a}$ **is gelijk aan:**

A. $\frac{b^2-a^2}{a^3b^3}$ B. $\frac{1}{ab}$ C. $\frac{b-a}{a^2b^2}$ D. $\frac{a-b}{ab}$

antwoord	A	B	C	D	invullen van getallen	anders
percentage	5	1	85	2	2	4

Opgave 7 Welke van de gelijkheden is/zijn correct ?

A. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x}{x-2} = \frac{3x-4}{(x+3)(x-2)}$ B. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x}{x-2} = \frac{2}{(x+3)(x-2)}$ C. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x}{x-2} = \frac{-3x-4}{(x+3)(x-2)}$

antwoord	A	B	C	invullen van getallen	anders
percentage	25	2	69	1	4

Het verwerken van een minteken blijft moeilijk. Maar verder lijkt het onder een noemer brengen in orde. Zie ook opgave 6.

Opgave 8 Los de volgende ongelijkheid op: $(x+7)(x+1)<(x+1)$

antwoord	$x < -6$ of $x > -1$
percentage	42

17% geeft na $x^2 + 7x + 6 < 0$ het verkeerde antwoord; bijvoorbeeld $x < -6$ of $x < -1$.
Ook een veel gemaakte fout was: delen door $x+1$, dus $x < -6$

Opgave 9 Hoeveel reële oplossingen heeft de volgende vergelijking:
$-x^3 + 2x^2 = 3x$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

antwoord	A	B	C
percentage	24	26	14

24% deelt door x en vindt zodoende geen oplossing. 35% denkt dat een derdegraads vergelijking altijd drie reële oplossingen heeft.

Opgave 10 Los het volgende stelsel vergelijkingen op $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

antwoord	$x = 3$ en $y = 1$
percentage	72

Het goede nieuws is dat in de eerste toets slechts 33% het goede antwoord wist.

Opgave 11 $\frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+1}$ **is te herleiden tot** $\frac{8}{x^2-6x-7}$ **. Bereken** A **en** B

antwoord	$A = 1$ en $B = -1$
percentage	47

Een combinatie van onder één noemer brengen en het oplossen van een stelsel is dus teveel gevraagd. Toch zijn dit soort vaardigheden bij het calculus-onderwijs op het tijdstip van afname al aan de orde geweest.

Opgave 12 $\frac{{}^{10}\log 6}{{}^{10}\log 3}$ **is te herleiden tot**

A. $\ln 2$ B. $\ln 3$ C. $\frac{\ln 6}{\ln 3}$ D. $\ln 6^{-3}$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	18	20	55	5	2

minder contacturen beschikbaar maar geen enkele leerling hoeft vanaf 2007 tegen zijn zin wiskunde B te kiezen. Er mag altijd op affiniteit met het vak gerekend worden. Als de toegemeten tijd ook daadwerkelijk in echte contacttijd zou worden omgezet, moet dat lukken. Helaas zijn er in dit opzicht grote verschillen tussen scholen. Meer eenduidigheid in deze is wenselijk.
2. De stof van het schoolexamen en het centrale examen zullen min of meer disjunct zijn. Van die tweedeling kan op de volgende manier gebruik gemaakt worden. Toets op het centrale examen de vaardigheden zonder dat gebruik van formulekaarten is toegestaan. Dit geeft de leerlingen en vervolgopleidingen een garantie op een soepeler aansluiting op het gebied van wiskunde, immers alle instromende studenten voldoen aan dezelfde normen van het centrale examen. Voor het vervolgonderwijs is dan duidelijk waarop aangesloten moet worden.
3. In het schoolexamen kan dan probleemoplossend en contextrijk getoetst worden met ondersteuning van alle denkbare ICT-hulpmiddelen. Het is te verwachten dat sommige scholen hier een eigen invulling aan gaan geven, zodat de ontwikkelingen die op dit gebied gaande zijn niet verloren gaan en voortgang vinden. Scholen die dat wensen zouden bij het invullen van het schoolexamen een beroep moeten kunnen doen op ondersteuning van bijvoorbeeld het CITO.
4. Tenslotte: maak het nieuwe programma niet te overladen. Beter iets minder stof, maar dan wel zo dat het goed beklijft. De ontstane problematiek kan ook een gevolg zijn van het feit dat er teveel onderwerpen aan bod komen, die dan veel globaler geleerd worden.

Vergelijking met instaptoetsen uit 1975 en 1987

De bezorgdheid over het niveau van instromende studenten is niet nieuw. Ook in de vorige eeuw werden ingangstoetsen afgenomen. In Delft zijn de eerste

Opgave 13 Welke van de volgende gelijkheden is/zijn fout?

A. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ B. $e^{-3\ln b}=\frac{1}{b^3}$ C. $e^{-\ln 3+\ln 6}=3$ D. $\frac{2}{3}\ln 8=\ln 4$

antwoord	A	B	C	D
percentage	4	9	54	17

14% bleek meerdere alternatieven fout te vinden. Daarbij werd alternatief D het meest genoemd.

Opgave 14 De afgeleide van $f(x)=\frac{3x-2}{x^2}$ is gelijk aan:

A. $\frac{-3x+4}{x^3}$ B. $\frac{3}{2x}$ C. $\frac{-3x-4}{x^3}$ D. $\frac{9x+4}{x^3}$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	66	1	25	3	5

Alleen het verwerken van een - geeft nog wat problemen (91% kan nu toch de quotiëntregel toepassen).

Opgave 15 De afgeleide van de functie $f(x) = \ln(\sin(x))$ is:

A. $\frac{1}{\sin x}$ B. $\frac{1}{\cos x}$ C. $\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$ D. $\frac{\cos x}{\sin x}$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	3	5	5	85	2

De score valt niet tegen.

Opgave 16 Gegeven is de functie $f(x)=\sin x\cdot\cos x$
Welke van de volgende beweringen is waar?

A. $f'(x)=\cos x\cdot\sin x$ B. $f'(x)=-\cos x\cdot\sin x$
C. $f'(x)=\cos(2x)$ D. $f'(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	2	13	52	19	14

Hadden we toch alternatief C in de vorm $\cos^2 x - \sin^2 x$ moeten geven? De reden voor deze keus was dat men ook kan beginnen met: $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Opgave 17 $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ is gelijk aan

A. $\cos(x)$ B. $\cos(x+\pi)$ C. $\sin(x-\pi)$ D. $-\cos(x)$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	66	9	2	13	11

Opgave 18 Een primitieve van de functie $f(x)=(\frac{1}{x})^3$ is

A. $(\ln(x))^3$ B. $\frac{-1}{2x^2}$ C. $\frac{-3}{x^4}$ D. $\frac{1}{4}(\ln(x))^4$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	3	52	2	40	3

Toch nog 40% van de studenten kiest voor alternatief D. Tegenvaller!

Opgave 19 Bepaal een primitieve van: $f(x)=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x}$

antwoord	$-e^{-x}+\ln\|x\|$	$\ln e^x+\ln x$	anders
percentage	50	19	31

$-e^{-x}+\ln x$ is ook meegenomen in die 50%.

Opgave 20 Is de volgende bewering waar of onwaar:
Een primitieve van de functie $f(x)=2xe^{x^2}$ is $F(x)=e^{x^2}+c$

antwoord	waar	onwaar
percentage	73	27

Opgave 21 Is de volgende bewering waar of onwaar voor alle x?
$(\sin x+\cos x)^2=1$

antwoord	onwaar	waar
percentage	70	30

Opgave 22 Is de volgende bewering waar of onwaar voor alle x?
$(\sin(2x))^2+(\cos(2x))^2=2$

antwoord	onwaar	waar
percentage	72	28

Opgave 23 Gegeven is $\sin\alpha=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\pi<\alpha<1\frac{1}{2}\pi$
Bereken $\cos\alpha$

antwoord	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	anders
percentage	40	20	40

lichtingen na invoering van de vakken wiskunde A en B ook al onderworpen aan meerkeuzetoetsen en ook na invoering van de Mammoetwet. De testen uit 1987 en 1975 bevatten vier vragen gemeenschappelijk. Deze vier vragen zijn ook opgenomen in de eerste toets die meteen aan het begin van het studiejaar 2005-2006 op de 3TU is afgenomen. In Opgaven-2 zijn de vier vragen met telkens het percentage studenten per antwoordalternatief weergeven. De alternatieven zijn gerangschikt in aflopende mate van populariteit in 2005.

Noten

[1] - Jaarlijkse instroommonitor en ander IOWO-onderzoek, november 2004, Jules Warps (RUN).
- Verslag van het onderzoek aansluiting Vwo-UT, mei 2005, Lia van Asselt.
[2] Afkomstig uit het stuk: 'Rekenmachientjes of rekenvaardigheden? Tijd voor de balans' van Jacob Perrenet, Hans Sterk (TU/e).
[3] - J. van de Craats, R. Bosch: Basisboek Wiskunde.
- A. Verschuren: Dictaat Rekenvaardigheden TU/e
[4] Zeven jaar Tweede Fase, een balans. Tweede Fase Adviespunt, september 2005.
[5] Project MathMatch. Digitale Universiteit.

Over de auteurs

De leden van de werkgroep 3TU zijn:
- Frans Martens, coördinator serviceonderwijs wiskunde TU/e, uit dien hoofde betrokken bij de aansluiting VWO-TU/e.
E-mailadres: f.j.l.martens@tue.nl
- Brigit Geveling, bachelor-coördinator en docent TW aan de UT.
E-mailadres: b.m.geveling@math.utwente.nl
- Wim Caspers, afdelingsleider havo en docent wiskunde aan het Adelbert College in Wassenaar, tevens verbonden als vwo-docent 'in residence' aan de TUD.
E-mailadres: w.caspers@adelbert.nl
- Lia van Asselt, docent wiskunde aan het Bonhoeffer college te Enschede en tevens aangesteld als adviseur aansluiting wiskunde aan de UT.
E-mailadres: asseltc@math.utwente.nl

FORMULES ONTHOUDEN VOOR CIRKEL EN BOL

[Yvonne Killian]

De formules voor omtrek en oppervlakte van cirkels en de formules voor oppervlakte en inhoud van bollen hoef je nooit meer te vergeten met:

Over de auteur

Yvonne Killian is wiskundeleraar aan het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt te Amersfoort.
E-mailadres: yvonne.killian@planet.nl

Voor oppervlakte en omtrek van een *cirkel* (diameter d) en een *vierkant dat precies om de cirkel heen past* (zijde d) geldt:

van vierkant naar cirkel: $4 \rightarrow \pi$

Omtrek vierkant = $4\,d$
→ Omtrek cirkel = $\pi\,d$

Oppervlakte vierkant = $d^2 = \frac{1}{4} \times 4\,d^2$
→ Oppervlakte cirkel = $\frac{1}{4}\,\pi\,d^2$

{[scan2]}

Voor oppervlakte en inhoud van een bol (diameter d) en een *kubus die precies om de bol heen past* (ribbe d) geldt:

van kubus (regelmatig zesvlak) naar bol: $6 \rightarrow \pi$

Oppervlakte kubus = $6\,d^2$
→ Oppervlakte bol = $\pi\,d^2$

Inhoud kubus = $d^3 = \frac{1}{6} \times 6\,d^3$
→ Inhoud bol = $\frac{1}{6}\,\pi\,d^3$

Unequal participation in mathematics and science education

Annemarie van Langen

Garant

TABEL 1 Eindexamenkandidaten havo en vwo in 2004 naar profiel, in procenten (Bron: CFI)

	jongens	meisjes	totaal
HAVO	n = 18192	n = 21272	n = 39464
Cultuur & maatschappij	11,2	52,5	33,5
Economie & maatschappij	50,2	28,8	38,6
Natuur & gezondheid	15,6	16,5	16,1
Natuur & techniek	19,7	1,2	9,8
Combinatieprofiel	3,3	1,0	2,0
VWO	n = 12814	n = 15360	n = 28174
Cultuur & maatschappij	6,1	31,6	20,0
Economie & maatschappij	39,9	29,1	34,1
Natuur & gezondheid	24,3	33,6	29,4
Natuur & techniek	24,3	3,3	12,9
Combinatie	5,4	2,4	3,7

DE ACHTERBLIJVENDE BELANGSTELLING VOOR EXACTE VAKKEN IN HAVO EN VWO

[Annemarie van Langen]

Profielen

Sinds 1998 moeten leerlingen in havo en vwo kiezen uit vier profielen die elk een specifieke combinatie van eindexamenvakken inhouden. De vier profielen zijn cultuur & maatschappij (CM), economie & maatschappij (EM), natuur & gezondheid (NG) en natuur & techniek (NT). In beide natuurprofielen zijn natuurkunde, wiskunde B en scheikunde verplicht; bij NG gaat het echter om de deelvakken, bij NT om de hele vakken. Daarnaast is bij NG ook biologie verplicht, aangezien dit profiel met name is ontwikkeld ter voorbereiding op een beroepsloopbaan in de gezondheidszorg of het milieu.
Overigens zal vanaf 2007 het een en ander veranderen in de profielen; de exacte deelvakken verdwijnen en natuurkunde is niet langer verplicht in het profiel NG.

Aanvankelijk was het de bedoeling van de profiel-ontwikkelaars dat alleen het profiel NT rechtstreeks zou voorbereiden op een bètastudie. Onder invloed van de tekorten in onderwijs en op de arbeidsmarkt moest dit echter worden bijgesteld; inmiddels krijgen ook studenten met het profiel NG rechtstreeks toegang tot de meeste bètastudies. Zij blijken echter in veel geringere mate daadwerkelijk naar deze studies door te stromen dan de leerlingen met een profiel NT: gemiddeld gaat het om 20 versus 66 procent. Deze percentages verschillen overigens nog sterk naar sekse en schooltype. Van de leerlingen met een profiel NG stroomt op het havo 39% van de jongens en 11% van de meisjes door naar een bètastudie en op het vwo 32% van de jongens en 15% van de meisjes. Van de leerlingen met een profiel NT stroomt op het havo 69% van de jongens en 39% van de meisjes door naar een bètastudie en op het vwo geldt dat voor 72% van de jongens en 46% van de meisjes.

Onderzoek

In een recent uitgevoerd onderzoek zijn de gegevens geanalyseerd van 3513 leerlingen op 52 scholen voor havo of vwo die rond 2002 hun profielkeuze hebben gemaakt. Het onderzoek had als doel vast te stellen welke kenmerken van leerlingen, ouders en scholen van invloed zijn op de keuze voor een exact profiel. Zoals blijkt uit het voorgaande, zijn de beide natuur-profielen echter niet volledig gelijkwaardig; noch in zwaarte van de exacte vakken, noch in kansen op doorstroom naar een bètastudie. Vandaar dat in de analyses onderscheid gemaakt is tussen een niet-exact profiel (een maatschappijprofiel), een matig exact profiel (natuur & gezondheid) of een zwaar exact profiel (natuur & techniek). Over de aanvullend gekozen vakken in de vrije ruimte waren geen gegevens bekend; zij zijn niet verdisconteerd in het onderzoek.

Invloeden op keuze voor exact

In eerste instantie is uitsluitend een vergelijking gemaakt van de invloed van de achtergrondkenmerken van de leerling versus de invloed van diens prestaties op de profielkeuze. De onderzochte achtergrond-kenmerken betreffen sekse, het opleidingsniveau van de ouders en etnische herkomst. Als prestatiematen is het schooltype (havo of vwo) geselecteerd en daarnaast de scores op toetsen voor wiskunde en Nederlands die in het kader van het onderzoek waren afgenomen in leerjaar 1 en 3. Het lijkt misschien vreemd om te onderzoeken of de Nederlandse taalvaardigheid van invloed is op de exactheid van het gekozen profiel, maar het is anderzijds goed voorstelbaar dat een hoge taalvaardigheid samenhangt met een niet-exacte profielkeuze.
Uit de resultaten blijkt dat de prestatiematen samen de beste voorspeller zijn van de mate van exactheid van het gekozen profiel. Vooral de score op de wiskundetoets in leerjaar 3 van havo en vwo speelt een belangrijke rol (en de Nederlandse taalvaardigheids-score in leerjaar 1 heeft inderdaad een licht negatief significant effect). Deze bevinding is natuurlijk conform verwachting en past ook bij het zogenaamde *'meritocratisch onderwijsideaal'* volgens welke de persoonlijke verdiensten van het individu (de 'merits') bepalend moeten zijn voor de schoolloopbaan en het schoolsucces. Maar ook als we rekening houden met de prestaties, blijken tevens de sekse van de leerling en het opleidingsniveau van de ouders van invloed op de exactheid van het gekozen profiel. Dat geldt niet voor etnische herkomst.

Jongens en kinderen van hoog opgeleide ouders binnen hetzelfde schooltype kiezen bij gelijke prestaties een exacter profiel dan respectievelijk meisjes en kinderen van laag opgeleide ouders. Deze samenhang tussen sekse en ouderlijk opleidings-niveau enerzijds en de mate van exactheid van het gekozen profiel anderzijds toont aan dat het Nederlands voortgezet onderwijs nog altijd een niet-meritocratische component heeft, ook binnen de relatief homogene schooltypen van havo en vwo.

Vervolgens is onderzocht welke overige factoren na prestaties, sekse en het ouderlijk opleidingsniveau nog een bijdrage leveren aan de mate van exactheid van het profiel. Een belangrijk deel van de gevonden determinanten betreffen houdingen van leerlingen zoals interesse en plezier in de exacte vakken, en belang van deze vakken in relatie tot de eigen toekomstplannen. In een ruime interpretatie zijn dat kenmerken die – naast prestaties – ook gelden als persoonlijke verdiensten van leerlingen en dus vanuit meritocratisch perspectief eveneens terecht bepalend zijn. Anderzijds blijkt uit de grote sekseverschillen in dergelijke kenmerken (meisjes vinden exacte vakken gemiddeld genomen significant minder leuk, nuttig en interessant dan jongens) ook de invloed van seksestereotiepe socialisatie. Met andere woorden: dat gebrek aan belangstelling bij meisjes is hoogst-waarschijnlijk niet aangeboren, maar aangeleerd onder invloed van de opvoeders en andere mensen uit de omgeving.
Bovendien hebben de ouders ook via het aan- en afraden van profielen significant invloed op de exactheid van de keuze van hun kinderen.

De scholen spelen eveneens een rol. Op de scholen waarvan de schoolleiding in de vragenlijst heeft aangegeven dat men er expliciet naar streeft dat zoveel mogelijk leerlingen een natuurprofiel kiezen, wordt inderdaad vaker zo'n profiel gekozen. De meeste scholen hebben echter gemeld de keuze van hun leerlingen zo min mogelijk te willen sturen. Andere onderzochte schoolorganisatiekenmerken met betrekking tot de profielkeuze bleken niet significant van invloed op de exactheid van het gekozen profiel. Dit geldt bijvoorbeeld voor het moment van de profielkeuze (aan het begin van de 4e klas of later), het opsplitsen van de keuze in twee fasen (eerst de natuur- of maatschappijstroom, pas later een profiel) en het gecombineerd aanbieden van natuur- en scheikundeonderwijs (nask) in de leerjaren voorafgaand aan de profielkeuze. Ook was er geen verschil in de mate waarin leerlingen exact kozen tussen scholen die wel en geen eisen stellen aan de rapportcijfers in de exacte vakken om een natuurprofiel te mogen kiezen.

Meisjes

Wanneer we nagaan wat onze bevindingen in de praktijk betekenen, valt vooral het extreem lage percentage meisjes op dat voor een profiel natuur & techniek kiest (zie tabel 1) Op het havo kiest ruim één procent van de meisjes dit profiel, terwijl vóór 1998 ongeveer 9% van de havo-meisjes het meest exacte pakket (d.w.z. met drie exacte vakken) koos. Op het vwo kiest minder dan 4% van de meisjes het profiel NT terwijl voorheen ongeveer 30% de drie exacte vakken koos. Volledigheidshalve is gecontroleerd in hoeverre meisjes met een profiel natuur & gezondheid qua wiskundescores en gemiddelde rapportcijfers in de exacte vakken in leerjaar 3 eigenlijk afwijken van jongens met een profiel natuur & techniek. Uit de cijfers blijkt[1] dat de gemiddelden van beide groepen wel significant verschillen, maar tegelijkertijd is er sprake van aanzienlijke overlap tussen de prestaties van beide groepen. Ter illustratie: de jongens met een profiel NT hadden in leerjaar 3 een gemiddeld rapportcijfer voor de drie exacte vakken van 7,5 (standaarddeviatie 0,8), de meisjes met een profiel NG hadden gemiddeld een 7,2 (standaarddeviatie eveneens 0,8). Een substantieel deel van de meisjes die kiezen voor een profiel NG presteerde dus in leerjaar 3 van havo en vwo op hetzelfde niveau als jongens die een profiel NT kiezen.

Conclusie

Er bestaat nog steeds een duidelijke relatie tussen achtergrondkenmerken van leerlingen en studenten, met name hun sekse en het ouderlijk opleidingsniveau, en de mate waarin zij exact kiezen. Het gevolg is dat de bestaande maatschappelijke ongelijkheid op het betreffende terrein via het onderwijs ten minste gedeeltelijk wordt gereproduceerd. Bovendien wordt daardoor niet optimaal gebruik gemaakt van het aanwezige bètatalent. Scholen verschillen in de mate waarin ze deze relatie versterken of neutraliseren.

Beleidsmatig gezien is hier dus zeker nog winst te halen. Voor scholen en docenten lijkt het in dat kader vooral aan te bevelen zich te concentreren op het beïnvloeden van de attitudes van leerlingen en hun ouders, zodat ze bijvoorbeeld afstappen van het idee dat natuur & techniek 'niks voor meisjes' zou zijn.

Gezien het streven van de overheid naar een hogere instroom in de bètastudies is het de vraag of het wel zo'n goede zet is geweest om twee natuurprofielen te ontwikkelen: leerlingen die voor het lichtere profiel NG kiezen, verlaten immers de vermeende hoofdroute naar een bètastudie terwijl dat in termen van prestaties veelal niet echt nodig is.

Literatuur

Annemarie van Langen (2005): Unequal participation in mathematics and science education. Nijmegen: ITS. ISBN 90-441-11892-7 (€ 16,00)

Noot

[1] Op de wiskundetoets scoren de NT-jongens gemiddeld 77,4 bij een standaarddeviatie (SD) van 13,4; de NG-meisjes gemiddeld 73,7 bij een SD van 13,3. Het gemiddelde rapportcijfer voor de exacte vakken in leerjaar 3 van de NT-jongens is 7,5 bij een SD van 0,8 en van de NG-meisjes 7,2 bij eenzelfde SD van 0,8. Een en ander betekent dat 96% van de NG-meisjes een wiskundescore heeft die hoger is dan -2×SD van de gemiddelde wiskundescore van de NT-jongens, en dat 95% van de NG-meisjes een hoger rapportcijfer voor de exacte vakken heeft dan -2×SD van het gemiddelde cijfer van de NT-jongens. Op basis van de hypothese dat er geen verschil tussen beide groepen is, zou dit 97,5% moeten zijn.

Over de auteur

Annemarie van Langen (1962) is onderwijskundige en als senior-onderzoeker verbonden aan het onderzoeksinstituut ITS van de Radboud Universiteit Nijmegen. Op 1 november 2005 is zij gepromoveerd op bovengenoemd proefschrift waarin verslag wordt gedaan van een reeks studies naar de achterblijvende deelname van groepen leerlingen en studenten aan exacte vakken en studierichtingen. Daarnaast doet ze onderzoek naar onderwijskansen voor allochtone en autochtone achterstandsgroepen en is ze betrokken bij het landelijk cohortonderzoek primair onderwijs (het PRIMA-cohort).
E-mailadres: A.v.Langen@its.ru.nl.

Wimecos-prijsvraag I

De vereniging WIMECOS (een vereniging van wiskundedocenten) schrijft een tweetal prijsvragen uit onder de lezers van Pythagoras en looft een aantal boeken (tot een totale waarde van *f* 100) als prijzen daarvoor uit.

Uit elk natuurlijk getal kan men een ander getal afleiden door de derde machten en de kwadraten van de cijfers van het oorspronkelijke getal te berekenen en op te tellen. Enkele voorbeelden:
uit 8497 leidt men af $512+64+729+343+64+16+81+49 = 1858$
uit 367 leidt men af $27+216+343+9+36+49 = 680$
uit 2 leidt men af $8+4 = 12$.

Vraag a: Bereken de grootste waarde van n waarvoor geldt dat het uit n afgeleide getal groter is dan n zelf.

Vraag b: Bewijs, zonder een berekening uit te voeren, dat er een getal bestaat dat gelijk is aan het daaruit afgeleide getal, of een groep verschillende getallen bestaat waarvan elk gelijk is aan het uit een ander lid van de groep afgeleide getal.

Vraag c: Bereken een getal of een groep van getallen, zoals in vraag b bedoeld wordt.

Wimecos-prijsvraag II

De eerste astronaut, die op Mars landde, was een bioloog. Het verbaasde dan ook niemand dat de eerste berichten naar de aarde melding maakten van de ontdekking van een wonderlijke plantensoort, die op Mars hele velden bedekt en in vele verschillende kleuren voorkomt.

Een nadere studie van deze plantensoort bracht al gauw aan het licht, dat er twee totaal verschillende voortplantingsmechanismen werkzaam zijn. Behalve het voor ons bekende mechanisme van bestuiving en zaadvorming is er namelijk ook nog dat van de wortelversmelting: zodra de wortels van twee planten met elkaar in aanraking komen, laten ze los van die planten en vergroeien met elkaar, waarna zich uit dat samengroeisel een nakomeling ontwikkelt.
Ter onderscheiding zullen we de nakomelingen, al naar gelang van hun ontstaanswijze, „smelten" en „stuiven" noemen.
Door het bijzonder hoge voortplantingstempo was het al heel gemakkelijk vast te stellen, dat de kleur de belangrijkste erfelijkheidsfactor is. De kleur van een nakomeling wordt namelijk volledig bepaald door de kleuren van de beide ouderplanten en door de ontstaanswijze van die nakomeling. Zo is bijvoorbeeld een stuif van een rode en een gele plant altijd blauw en een smelt van een rode en een gele plant altijd groen.
Volgens een wat dieper gaand onderzoek bleken bovendien ook nog de volgende regels te gelden:

I. Voor alle kleuren a, b, c geldt: de stuiven, die tot ouders hebben een a-plant en een stuif van een b-plant en een c-plant, hebben dezelfde kleur als de stuiven die tot ouders hebben een c-plant en een stuif van een a-plant en een b-plant.

II. Voor alle kleuren a, b, c geldt: de smelten, die een a-plant en een stuif van een b-plant en een c-plant tot ouders hebben, hebben dezelfde kleur als de stuiven, die ontstaan zijn uit een smelt van een a-plant en een b-plant en een smelt van een a-plant en een c-plant.

III. Voor alle kleuren a, b, c geldt: een stuif van een a-plant en een b-plant kan alleen dan dezelfde kleur hebben als een stuif van een a-plant en een c-plant, wanneer de kleuren b en c gelijk zijn.

Bewijs nu, zonder dat je ooit op Mars geweest bent, dat de volgende stellingen waar zijn.

1. Er is één kleur x met de eigenschap, dat de stuiven van een rode plant en een x-plant rood zijn. (Deze kleur x zullen we in de volgende stellingen „wit" noemen).
2. Voor elke kleur a geldt: een stuif van een a-plant en een witte plant is een a-plant.
3. Voor elke kleur a geldt: een smelt van een a-plant en een witte plant is een witte plant.

Twee Wimecos-prijsvragen, uit Pythagoras, vijfde jaargang (1965-1966), pag. 34 en pag. 62.

N.B. Wimecos was de voorloper van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

FEITENVEL ZAMBIA VI

Een project van het Wereldwiskunde Fonds

[Dirk Koolmees]

Land	Zambia
Aanvrager	Dirk Koolmees (uitgezonden via Stichting VSO Nederland)
Projectjaar	2002-2003
Projectinstelling	Charles Lwanga Teachers Training College, Chikuni, Southern Province. Dit college biedt een tweejarige lerarenopleiding, gericht op primair onderwijs en onderbouw middelbare school. De training bestaat uit een 'college based year', waarin de studenten les krijgen in vijf studiegebieden waaronder 'mathematics and science', en een stageperiode in het tweede jaar. Ongeveer 800 studenten volgen de opleiding, verdeeld over beide jaren.
Onderwijssituatie	Naar ervaring van aanvrager is het onderwijs dat de studenten op hun middelbare school hebben genoten vooral op het gebied van wiskunde zeer ondermaats. De meeste studenten moeten daarom veel eigen tijd steken in het ophalen, zoniet initiëren van die schoolwiskunde. Door het tekort aan goede boeken is er onvoldoende gelegenheid voor zelfstudie, hetgeen op termijn funest is: de vicieuze cirkel waarin het wiskundeonderwijs in Zambia zich bevindt, wordt zo immers niet doorbroken.
Specifieke situatie	De studenten hebben geen eigen boeken tot hun beschikking, maar op het college bevindt zich een 'resource center' waar ze na afloop van de colleges de literatuur kunnen bestuderen. Het aantal wiskundeboeken in deze bibliotheek bedraagt welgeteld tien bruikbare, in de zin van relevante, boeken. Gezien het aantal studenten en de 'leeftijd' van de boeken is het hard nodig hier verbetering in te brengen.
Ondersteuning	€ 3800,00 voor aanschaf van leerboeken wiskunde en aanverwante zaken.



FOTO 1 Charles Lwanga Teachers Training College



FOTO 2 In de bibliotheek van het college

DE 300E VERJAARDAG VAN π

[Dick Klingens]



Het schikt me slecht, ik moet veel werk verrichten, sprak hij overstuur
Ik heb al jaren een obsessie en die geeft mij rust noch duur
Daar ik verslaafd ben aan de cirkelkwadratuur
(Uit: Griekse tango, van Drs. P.)

We vieren het niet echt hier in Nederland, de π-dag op 14 maart van elk jaar. De oorzaak zal wel in onze datumaanduiding gelegen zijn: 14-3-2006, terwijl in Angelsaksische landen 3/14/2006 gebruikt wordt. Als we de rest van de decimale ontwikkeling bekijken, dan zouden we om exact één minuut voor twee (3/14 1:59) kunnen beginnen, niet zo handig aan het begin van de nacht. Gebruiken we een decimale klok dan beginnen we natuurlijk om 15:09u (3,14159) met:
- het aansnijden van een ronde *pie* (Amerikaans voor taart);
- een wedstrijd met het uit het hoofd opzeggen van zoveel mogelijk decimalen (het mag in verschillende talstelsels);
- aanheffen van liederen (*Happy π-day to you*) of het zelf maken van zo'n lied;
- zo veel mogelijk pi(zza) eten in 3 minuten en 14 seconden (3 uur en 14 minuten lijkt me in ieder geval ongezond);
- het luisteren naar Drs. P.'s *Griekse tango*;
- het klassikaal bekijken van de film *Pi* van Darren Aronofsky, met aan het eind een klein glaasje Piña Colada;
- andere (door 'pi-hards' zelf te bedenken) activiteiten.

Voor de Europese landen is wellicht 22 juli een geschiktere dag om te vieren, immers 22/7 is een van de benaderingen van Archimedes van π.
Het jaar 2006 is evenwel een bijzonder jaar, een kroonjaar: π bestaat dan 300 jaar als notatie voor het getal dat gelijk is aan de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en de middellijn daarvan.
Het was William Jones (1675-1749) die als eerste de zestiende kleine letter van het Griekse alfabet gebruikte voor de zo bijzondere verhouding; hij deed dat in zijn boek 'Synopsis Palmariorum Matheseos' (een nieuwe inleiding tot de wiskunde) dat in 1706 verscheen. Leonhard Euler (1707-1783) nam het gebruik ervan in 1736 over; daarvóór gebruikte hij de letter *p*, de eerste letter van het Griekse *perimeter*, omtrek. Het is zeker aan hem te danken dat ook nu π nog steeds staat voor 3,141592...

Die 300e verjaardag zouden we ook in Nederland moeten vieren, al was het maar met het vinden van ezelsbruggetjes voor het onthouden van de cijfers, zoals Nijmeegse studenten dat vroeger deden met (tel de letters van de woorden):
Eva o lief, o zoete hartedief,
uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.
Of in Frans België (gepubliceerd in 1879):
Que j'aime à faire apprendre
Un nombre util aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingenieux,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
En als hulp daarbij geven we π in 100 decimalen:
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803825342117068

Overigens, in 2020 moeten we de verjaardag *zeker* niet overslaan!

Literatuur

- *L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein: Pi, a source book. New York: Springer (2004)*
- *A.S. Posamentier, I. Lehmann: π, a biography of the world's most mysterious number. New York: Prometheus Books (2004).*
En veel, heel veel vindplaatsen op internet, zoals
- *Apfloat Homepage: Pi-calculator Applet (www.apfloat.org/apfloat_java/applet/pi.html)*

Over de auteur

Dick Klingens is eindredacteur van Euclides. Hij is als wiskundeleraar verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.
E-mailadres: dklingens@pandd.nl

PROEFWERK NABESPREKEN

[Lauran van Oers]

Langdurig en niet altijd effectief

Een gecorrigeerde toets teruggeven aan de klas deed ik bijna altijd op de voor het vak wiskunde traditionele wijze. Hopend op een flinke hoeveelheid Aha-Erlebnis en erop vertrouwend dat de leerlingen ademloos en geconcentreerd toekijken, werkte ik dan de opgaven op het bord uit. Verschillende oplossingsmethoden kunnen op die manier aan bod komen en er is gelegenheid tot discussie en het stellen van vragen. Als alle opgaven besproken zijn, kan er eventueel kritiek geleverd worden op de totstandkoming van de cijfers.
Deze werkwijze kost per proefwerk doorgaans een volledig lesuur. Bij twee-uursvakken zoals wiskunde A12 in havo-4 en wiskunde in de M-stroom in vwo-4 heb ik dit steeds als zeer vervelend ervaren. Ondanks het comfortabele toetsbandsysteem op onze school, waarbij de toetsen in de bovenbouw voor het grootste deel gemeenschappelijk worden gemaakt in uit de vrije ruimte gereserveerde tijd, kom je voortdurend tijd tekort omdat het programma erg overladen is. Een bijkomend verschijnsel is het gebrek aan aandacht van de leerlingen tijdens zo'n proefwerkbespreking. In nagenoeg 100% van de gevallen ligt het cijfer immers vast en waarschijnlijk komt het betreffende onderwerp pas volgend jaar weer aan bod. Waarom zou je dan opletten?

Tijd besparen, maar...

Het hierboven beschreven gebrek aan tijd is enigszins te compenseren door gebruik te maken van een overheadprojector. Als je thuis het proefwerk uitwerkt op een sheet, ben je in de klas wat sneller klaar met de bespreking. Dit (overigens door veel collega's toegepaste) systeem is te perfectioneren door gebruik te maken van tekstverwerker, vergelijkingseditor en printer. Sinds anderhalf jaar ben ik zelfs in het gezegende bezit van een laptop en een beamer in mijn lokaal. Die vervangen de overheadprojector uitstekend. De beeldkwaliteit is uitstekend en sheets zijn overbodig. Een bezwaar is wel dat thuis nog veel werk verzet moet worden, zeker als er aan de toets veel formules en plaatjes te pas komen.

Andere aanpak

Enkele weken voor de laatste zomervakantie kwam ik, door tijdnood gedreven, op het idee om de zaken eens wat anders aan te pakken. Ik bedacht dat het in feite overbodig was om zelf het proefwerk opnieuw uit te werken. De leerlingen hadden dit immers al gedaan! Het proefwerk dat ik zojuist had nagekeken (havo-4 wiskunde A12) bestond uit 12 onderdelen en elk daarvan was wel door één of meerdere leerlingen goed gemaakt. Ik selecteerde de oplossingen van een achttal leerlingen en scande die in een kwartier bij elkaar tot een volledige uitwerking van het proefwerk. Boven elk onderdeel plaatste ik de naam van de betreffende leerling. De puntentelling ging in één moeite door. Omdat elk van de gescande antwoorden geheel goed was, stond die er immers al vóór.
In de klas, bij de bespreking van het proefwerk, vertoonde ik het geheel met laptop en beamer.
Dat beviel bijzonder goed. De leerlingen hadden alle aandacht en stelden het zeer op prijs als hun uitwerking als voorbeeld werd gepresenteerd. Zien dat een medeleerling een uitwerking goed had terwijl je er zelf niet uitkwam, bleek heilzaam te werken. Bovendien bemerkte ik dat het een uitstekende manier was om een hardwerkende leerling in het zonnetje te zetten die weliswaar een wat lager cijfer scoorde, maar toch een onderdeel voorbeeldig had uitgewerkt. Ik kreeg niet één keer de opmerking dat een onderdeel veel te moeilijk was 'omdat niemand het goed had', en de bespreking verliep vlotter dan ooit!

Over de auteur

Lauran van Oers is docent wiskunde aan R.S.G. 't Rijks in Bergen op Zoom en auteur van het programma WisSter (www.wisster.nl).
E-mailadres: Lvanoers@hotmail.com

Proefwerk V4(N) Hoofdstuk 6 (1,2) en 1

1a (Patricia)

1 a) $3x - 7 \geq 6 - 9(2 - x)$
$3x - 7 = 6 - 9(2 - x)$
$3x - 7 = 6 - 18 + 9x$
$3x - 7 = -12 + 9x$
$-6x - 7 = -12$
$-6x = -5$
$6x = 5$
$x = \frac{5}{6}$

3

$3x - 7 \geq 6 - 9(2 - x)$ als $x \leq \frac{5}{6}$

1b (Pleuni)

b) $x^2 + 5x - 49 = -x + 6$
$x^2 + 6x - 55 = 0$
$(x - 5)(x + 11) = 0$
$x - 5 = 0 \lor x + 11 = 0$
$x = 5 \lor x = -11$

3

1c (Mohamed)

c $3x^2 - 2x = 5$
$3x^2 - 2x - 5 = 0$
$a = 3$ $b = -2$ $c = -5$
$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{--2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3}$
$x = \frac{--2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = -\frac{6}{6}$

3

1d (Dieuwertje)

d $px^2 - 3x = p$
$px^2 - 3x - p = 0$ $a = p, b = -3, c = -p$
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot p \cdot (-p) = 9 + 4p^2$
$9 + 4p^2 > 0$
want p heeft 2 opl als $D > 0$

2

Opmerking: Dieuwertje kreeg hiervoor 2 van de 3 punten!

2a (Rick)

2 a Het domein is ⟨←, 1,15] ✓
Het bereik is [0, →⟩ ✓
Hierdoor weet je dat de grafiek begint op de x-as bij 1,15 en dat laat je rekenmachine niet zien. Om een correcte grafiek te maken van een wortelfunctie met de lijn helemaal verticaal de y-as afzakken omdat het een halve parabool is.

4

2b (Samantha)

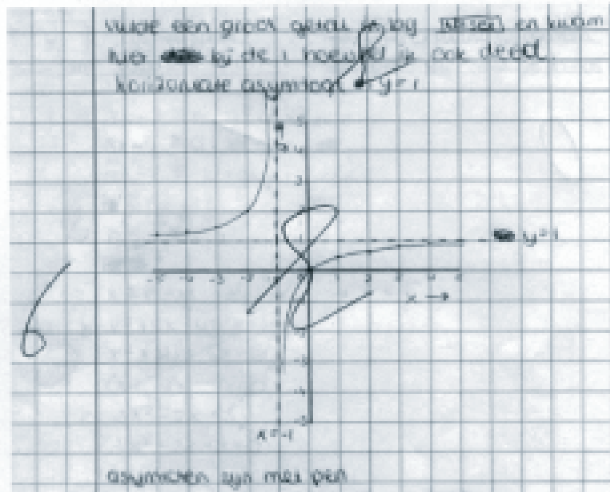
2 b $f(x) < 2$
$\sqrt{\ldots} \; >>>> = <<<< 2$
$-3\frac{1}{2}$
$\sqrt{\ldots} = 2,05$
$2,05 > 2$
$\sqrt{\ldots} = 1$
$1 < 2$
$f(x) < 2$ als $x > -3\frac{1}{2}$

4

Opmerking: Samantha kreeg hiervoor 4 van de 5 punten want ze heeft niet opgemerkt dat x niet groter mag zijn dan $1\frac{1}{2}$. De oplossing moet dus zijn: $x\ \langle -3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}]$!

2c (Claudia)

c z_{02}
de verticale asymptoot: maak onder de deelstreep 0 ⇒ $x + 1 = 0$ $x = -1$
verticale asymptoot: $x = -1$
de horizontale asymptoot heb ik berekend m.b.v. mijn GR. hierbij vulde ik eerst de formule in bij Y= y1, daarna ging ik naar de tabel



6

2d (Niels)

d Y= ... Enter Graph Window $-4, 3, 1, 0, 5, 1, 1$ Graph
Calc 5 Calc 5
$x = -2,4$
$x = 1,4$

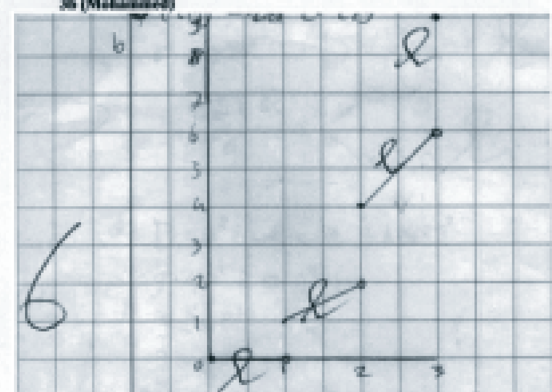
4

3a (Petra)

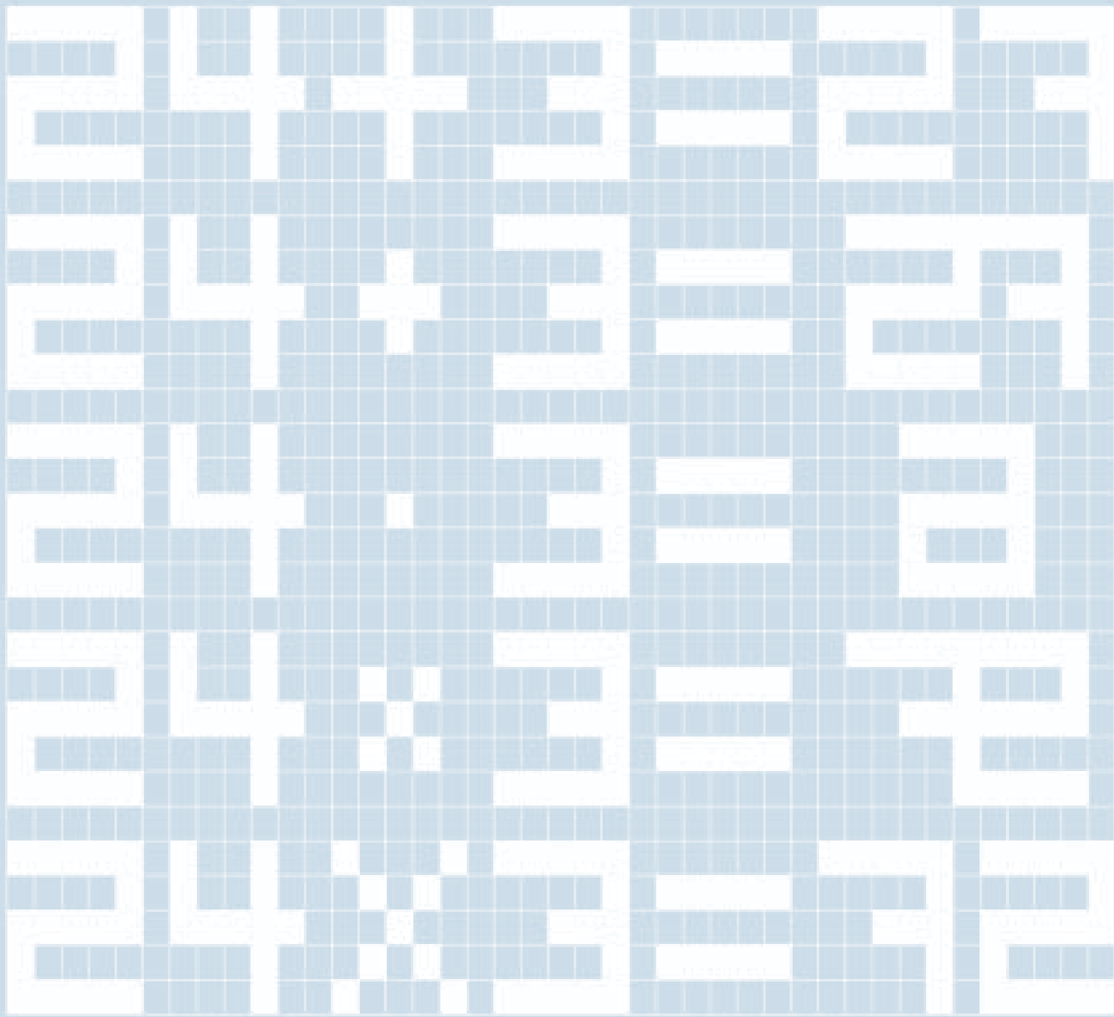
3a $\sqrt{x}$ ...

3

3b (Mohammed)



6



ONDERZOEK NAAR EEN EIGENSCHAP VAN TWEE NATUURLIJKE GETALLEN

Wanneer product en som van twee natuurlijke getallen elkaars omgedraaide zijn.

[Jack van der Elsen]

Inleiding

Getallen blijven de mensen boeien. Veel getaltheoretische problemen, die soms eenvoudig te formuleren zijn, zijn moeilijk te bewijzen (zoals bijvoorbeeld de Laatste Stelling van Fermat) of zijn nog niet bewezen (zoals het Vermoeden van Goldbach). Om gevoel te krijgen voor wat zo'n bewijs inhoudt, is het een goed idee om te beginnen met een eenvoudig getaltheoretisch fenomeen, als in het volgende voorbeeld.

Bekijk het product en de som van de twee natuurlijke getallen 3 *en* 24.
$3 \cdot 24 = 72$
$3 + 24 = 27$

Het valt op dat de som het omgedraaide (in het vervolg Reverse genoemd) is van het product. Dit fenomeen is het thema van dit artikel en kan als uitgangspunt dienen voor een onderzoeksopgave tijdens een wiskundeles in het voortgezet onderwijs.

Vragen

Het voorbeeld roept voor de wiskundige direct vragen op, zoals:
- Zijn er meer getallenparen met deze eigenschap?
- Hoeveel van dat soort getallenparen zijn er?
- Zijn er eindig of oneindig veel?
- Als het er oneindig veel zijn, zijn de oplossingen dan met een formule te beschrijven?
- Welke randvoorwaarden worden gesteld aan de notatie van de twee getallen?
- Zijn er meer oplossingen als we voorloopnullen toestaan?
- Komt het fenomeen ook voor in andere talstelsels dan in het tientallig?

Computerprogramma

Om een indruk te krijgen van het aantal getallenparen die voldoen, is het schrijven van een computerprogramma uitermate geschikt; echter dat is dan nog geen bewijs! Als we een C#('sie sjarp')programma schrijven dat dit soort getallenparen genereert, waarbij we geen voorloopnullen toestaan, dan krijg je een output als in figuur 1: paren (a;b) van natuurlijke getallen die voldoen, waarbij a en b kleiner zijn dan 100000.

Regelmaat ontdekken

We gaan eens kritisch kijken naar de output van het computerprogramma. We hebben daarmee al een aantal getallenparen gevonden. Snel zie je dat er voor getallenparen waarvan er een getal groter is dan 100, een zekere regelmaat optreedt. Het zijn de getallenparen (497;2), (4997;2), (49997;2), (499997;2), ...
We krijgen het vermoeden dat de getallenparen ($5 \cdot 10^k - 3$;2) allemaal oplossingen zijn; in ieder geval voor $k > 1$. Je kunt zelfs in de output zien dat voor er voor $k = 0$ en $k = 1$ ook oplossingen zijn. Het is een leuke opgave om te *bewijzen* dat al deze getallenparen oplossingen zijn van ons fenomeen.
Zo'n bewijs zou als volgt kunnen gaan (voor $k > 0$):

Stel $a = 5 \cdot 10^k - 3$ en $b = 2$. Dan geldt:

$$a+b = 5\cdot 10^k - 3 + 2$$
$$= 5\cdot 10^k - 1$$
$$= 4\underbrace{9\cdots 9}_{k \text{ negens}}$$

Dus:

$$\text{Reverse}(a+b) = \overbrace{9\cdots 9}^{k \text{ negens}}4$$
$$= 10^{k+1} - 6 \qquad \text{(ga dit na!)}$$
$$= (5\cdot 10^k - 3)\cdot 2$$
$$= a\cdot b$$

Hebben we alle oplossingen?

De oplossingen die we uit de output destilleren, zijn de getallenparen (0;0), (24;3), (9;9) en $\{(5\cdot 10^k - 3;2)\} \mid k \geq 0\}$.
De vraag is nu of dit *alle* oplossingen zijn. Met andere woorden: stel ik heb een getallenpaar (a;b) dat voldoet aan het fenomeen, waarbij verondersteld wordt dat $a \geq b$. Is dat getallenpaar dan één van de bovengenoemde?
Het hierna volgend bewijs is niet kort, maar wel recht toe recht aan. Het zou een behoorlijke opgave zijn voor scholieren in het voortgezet onderwijs om dit bewijs te produceren, maar misschien is er iemand die het verkorten kan. We formuleren eerst:

Stelling. Voor twee natuurlijke getallen a en b, met $a \cdot\ b$, geldt de relatie:
$ab = \text{Reverse}(a + b)$
waarbij $\text{Reverse}([a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0]\{ = [a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n]$,

met $[c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0] = \sum_{k=0}^{n} c_k\ 10^k$

$(c_n \neq 0,\ c_k \in\ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\{$

Dan is de oplossingsverzameling
$(0;0\{(24;3\{(9;9\}\} \cup\ (5\ 10^k - 3;2\{|k \cdot\ 0\}$.

Mijn bewijs verloopt in een aantal stappen, waarbij gebruik gemaakt wordt van een hulpstelling, een zogenoemd lemma. Hieronder volgt een schets van het bewijs.

Merk allereerst op dat, indien $a > 0$ en $b > 0$ en we geen voorloopnullen toestaan, dan a, b, $a + b$, ab niet deelbaar kunnen zijn door 10 (a, b, $a + b$, ab zijn nu alle $\neq 0$ mod 10).
- Stel dat $b = 0$. Dan:
$\text{Reverse}(a + b) = \text{Reverse}(a) = a \cdot 0 = 0$.
Dus ook $a = 0$. Een oplossing is dus (0;0).
- Stel dat $b = 1$. Dan:
$\text{Reverse}(a + b) = \text{Reverse}(a + 1) = a \cdot 1 = a$
Als $a < 10$, dan
$\text{Reverse}(a + 1) = a + 1$
want a + 1 $\neq$ 10. En dat levert een tegenspraak op.
Als $a = [a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0] > 10$, dan is $a_0 < 9$. Dan:

$$\text{Reverse}(a+1) = \text{Reverse}([a_n a_{n-1} \cdots a_1 (a_0 + 1)])$$
$$= [(a_0 + 1) a_1 \cdots a_{n-1} a_n] = a = [a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0]$$

Met andere woorden: $a_0 + 1 = a_n$ en $a_n = a_0$. Tegenspraak!
- Stel dat (a;b) een oplossing is met $a = b > 1$.

Stel dat er een n is zodat $10^n < a < 5 \cdot 10^n$. Dan geldt:

$$n+1 = \text{Length}(2a) = \text{Length}(\text{Reverse}(2a)) = \text{Length}(a^2)$$
$$\geq \text{Length}(10^{2n})$$
$$= 2n+1$$

Dus $n = 0$.
Stel dat er een n is met $5 \cdot 10^n < a < 10^{n+1}$. Dan geldt:

$$n+2 = \text{Length}(2a) = \text{Length}(\text{Reverse}(2a)) = \text{Length}(a^2)$$
$$\geq \text{Length}\left((5 \cdot 10^n)^2\right) = \text{Length}(25 \cdot 10^{2n})$$
$$= 2n+2$$

Dus $n = 0$.
In beide gevallen is $n = 0$ en dus $a < 10$.
We kunnen snel nagaan dat er slechts twee oplossingen zijn: (2;2) en (9;9).

Veronderstel dus verder dat $1 < b < a$. We kunnen nu het volgende lemma bewijzen.

Lemma. Als $(a;b)$ een oplossing is met $1 < b < a$, dan is $b < 10$.

Bewijs van het lemma. Ga na dat voor $a > b > 1$, geldt $ab > a + b$.
Ook is er een natuurlijk getal n met
$10^n < a + b < ab < 10^{n+1}$
Dan is Length($a + b$) = Length(ab) = $n + 1$.
Voor $n = 0$ is $ab < 10$ en dus ook $b < 10$.
Voor $n = 1$ is $ab < 100$ en omdat $b < a$, geldt dat $b < 10$.
We hoeven dus alleen $n > 1$ te onderzoeken.
Stel nu Length(a) = Length($a + b$). Dan:

$$n+1 = \text{Length}(a+b) = \text{Length}(ab)$$
$$\geq \text{Length}(a) + \text{Length}(b) + 1$$
$$= n+1+\text{Length}(b) - 1$$
$$= n + \text{Length}(b)$$

Dan $1 \geq$ Length(b), dus $b < 10$.
Stel dat Length(a) = Length($a + b$) – 1 = n + 1 – 1 = n.
Dan: $a > 5 \cdot 10^{n-1}$ én

$$n+1 = \text{Length}(a+b) = \text{Length}(ab)$$
$$\geq \text{Length}(5b \cdot 10^{n-1})$$
$$= n - 1 + \text{Length}(5b)$$

Als $b \geq 20$, dan Length($5b$) ≥ 3. Dat leidt tot een tegenspraak met de voorwaarde dat Length($a + b$) = $n + 1$.
Dus $b < 20$.

Ook geldt dat $a > 10^n - b$ en dus $10^{n+1} > ab > b(10^n - b)$.
Omschrijven levert de kwadratische ongelijkheid:
$b^2 - b \cdot 10^n + 10^{n+1} > 0$
of
$b^2 + 10^n(10 - b) > 0$
Voor $b < 10$ klopt dit zonder meer, en voor $10 < b < 20$ kunnen we de waarden van $b^2 + 10^n(10 - b)$ uitrekenen; zie de tabel in figuur 2.
De enige positieve waarde is voor $n = 2$, $b = 11$.
Maar dan:

$$100 < a + 11 < 11a < 1000 \Leftrightarrow 89 < a < 91 \Leftrightarrow a = 90$$

Dit is in tegenspraak met het feit dat a niet deelbaar is door 10.
Dus hebben we, zoals in het lemma gesteld: $b < 10$.

Bewijs van de stelling

Het lemma is een belangrijke stap in het bewijs van de stelling. We veronderstellen nog steeds dat $1 < b < a$.
In het geval $a + b < 10$ en $ab < 10$, verschijnt de oplossing $(a;b) = (2;2)$ en in het geval $a < 10$ en $a + b > 10$, krijgen we de oplossing $(a;b) = (9;9)$. Beide oplossingen hadden we al bij het geval $a = b$.
Als $a > 10$, $a = [a_n \cdots a_0]$, $n \geq 1$ en $b + a_0 > 10$, kunnen we aantonen dat moet gelden dat $a + b < 10^{n+1}$.
Dan volgt:

$$b([a_n \cdots a_0]) = ab = \text{Reverse}(a+b) = \text{Reverse}([\cdots(a_0+b-10)])$$
$$= [(a_0+b-10)\cdots]$$

Er is dus een k, $0 \leq k \leq b - 1$, zodat:

$$a_0 + b - 10 = ba_n + k \Leftrightarrow a_0 = 10 - b + ba_n + k \Leftrightarrow a_0$$
$$= 10 + b(a_n - 1\{ + k \cdot \ 10$$

hetgeen een tegenspraak oplevert.
Dan blijft over het geval $a > 10$, $a = [a_n \cdots a_0]$, $n \geq 1$ en $b + a_0 < 10$.
We kunnen dan voor b, a_0 en a_n de volgende voorwaarden afleiden:
(C1) $ba_n < 10$
(C2) $2 \leq b \leq 9$
(C3) $1 \leq a_n \leq 4$
(C4) $ba_0 = a_n \bmod 10$
(C5) $ba_0 > 10$
(C6) $ba_n \leq b + a_0 < 10$
(C7) $b + a_0 \leq ba_n + b - 1$

Wanneer we alle mogelijke drietallen $(b;a_0;a_n)$ bekijken, dan zijn er slechts twee die aan de voorwaarden C1–C7 voldoen: (3;4;2) en (2;7;4).
Uit het drietal (3;4;2) volgt slechts één oplossing, te weten $(a;b) = (24;3)$.
Uit het drietal (2;7;4) volgen de resterende oplossingen.
Dit zijn de oplossingen $(a;b)$ waarbij $b = 2$ en $a = 5 \cdot 10^n - 3$, met $n \geq 1$. Er geldt dan namelijk:

$$b([a_n \cdots a_0]) = [(a_0+b)\cdots a_n] \Leftrightarrow 2([4a_{n-1}\cdots a_1 7]) = [9a_1 \cdots a_{n-1}4]$$

Voor $n = 1$: 2([47]) = [94], hetgeen meteen de correcte oplossing $(a;b) = (47;2) = (5 \cdot 10^1 - 3;2)$ oplevert.
Voor $n = 2$:

$$2([4a_1 7]) = [9a_1 4] \Leftrightarrow 2([a_1 7]) = [1a_1 4] \Leftrightarrow$$
$$20a_1 + 14 = 100 + 10a_1 + 4 \Leftrightarrow$$
$$10a_1 = 90 \Leftrightarrow$$
$$a_1 = 9$$

Oplossing is dus $(a;b) = (497;2) = (5 \cdot 10^2 - 3;2)$.
Voor grotere n verloopt het bewijs ongeveer hetzelfde.

Het volledige bewijs (in het Engels) is opvraagbaar bij de auteur.

Uitbreiding van de opgave

In de paragraaf Vragen werd de vraag geformuleerd welke randvoorwaarden aan de notatie van de getallen wordt gesteld. Zo hebben we in het voorafgaande verondersteld dat de som en het product van de twee getallen geen voorloopnullen bevatten. (Merk op dat in de formulering van de stelling de definitie van $[c_n \cdots c_0]$ hiervoor zorg draagt: $c_n \neq 0$.) Als we dat *wel*

FIGUUR 2 Waarden van $b^2 + 10^n(10 - b)$

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
0	0	0	0
2	2	4	4
47	2	49	94
497	2	499	994
4997	2	4999	9994
49997	2	49999	99994
24	3	27	72
9	9	18	81

n \ b	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	21	-56	-131	-204	-275	-344	-411	-476	-539
3	-879	-1856	-2831	-3804	-4775	-5744	-6711	-7676	-8639
4	-9879	-19856	-29831	-39804	-49775	-59744	-69711	-79676	-89639

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
0	0	0	0
2	2	4	4
2	47	49	94
2	497	499	994
3	24	27	72
5	26	031	130
5	386	0391	1930
8	455	0463	3640
9	9	18	81
11	110	0121	1210
15	228	0243	3420
15	624	0639	9360
21	600	00621	12600
23	170	0193	3910
35	212	0247	7420
51	300	00351	15300
86	600	00886	68800
99	990	01089	98010

FIGUUR 3 Output gewijzigd programma:

toelaten, krijgen we bijvoorbeeld ook de oplossing $a = 110$ en $b = 11$. Dan is immers

$$ab = 110 \cdot 11 = 1210 = \text{Reverse}(0121)$$
$$= \text{Reverse}(121) = \text{Reverse}(110 + 11)$$
$$= \text{Reverse}(a + b)$$

Het is een interessante opgave om te zien of er nog meer oplossingen zijn. We kunnen dat voor de eerste getallenparen checken door het computerprogramma enigszins aan te passen.
We zien in figuur 3 de oplossingen uit het oorspronkelijke vraagstelling terug plus een behoorlijk aantal nieuwe paren. Een vraag die rijst, is of er reeksen van paren zijn die met een andere formule te beschrijven zijn, bijvoorbeeld met $(5;4 \cdot 10^n - 14)$. Het kan een opgave zijn om te bewijzen dat deze paren het allemaal doen, of dat een tegenvoorbeeld te vinden is.
Een andere vraag betreft het aantal voorloopnullen. We zien in de output gevallen met 0, 1 of 2 voorloopnullen. Kan voor ieder natuurlijk getal k een paar met k voorloopnullen geconstrueerd worden?
Dit zijn open vragen die door mij nog niet uitgezocht zijn.

Grondtallen

We hebben tot nu toe steeds met grondtal 10 gewerkt. Een opgave zou kunnen zijn het programma zodanig te veranderen dat de mogelijkheid geboden wordt een willekeurig grondtal op te geven. Als we dit doen, blijkt dat de volgende drie getallenparen voor ieder grondtal $R > 2$ voldoen aan de oorspronkelijke vraagstelling: (0;0), (2;2), $(R - 1;R - 1)$; alleen (2;2) voldoet niet voor grondtal 4.
Het bewijs dat voor alle grondtallen $R > 2$ het paar $(R - 1;R - 1)$ een oplossing is, luidt als volgt.
Voor de som geldt:
$$(R-1)+(R-1)=2R-2=R+(R-2)=[1(R-2)]_R$$
Voor het product geldt:
$$(R-1)(R-1)=R^2-2R+1=R(R-2)+1=[(R-2)1]_R$$

Tot slot

Zoals eerder gesteld, getallen blijven mensen boeien. Met een eenvoudige vraagstelling kunnen patronen ontdekt worden in vreemde reeksen getallen, en als een en ander in formulevorm om te schrijven is, wordt het probleem hanteerbaar voor de jonge wiskundige onderzoeker.
In het bovenstaande hebben we een eenvoudige techniek als een bewijs met volledige inductie nog niet hoeven te gebruiken; daarmee kunnen beweringen als 'Voor $n > 3$: $10^n = 64 \bmod 144$' bewezen worden.
Geconcludeerd kan worden dat eigenschappen van natuurlijke getallen stof genoeg doen opwaaien voor een interessante wiskundeles.

Over de auteur

Jack van der Elsen studeerde wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen en is werkzaam als software engineer bij Oce-Technologies BV te Venlo. Hij is auteur van de boeken 'Alphametics' en 'Black and White Transformations' (uitgegeven door Shaker Publishing BV, Maastricht).
E-mailadres: jack.vanderelsen@oce.com

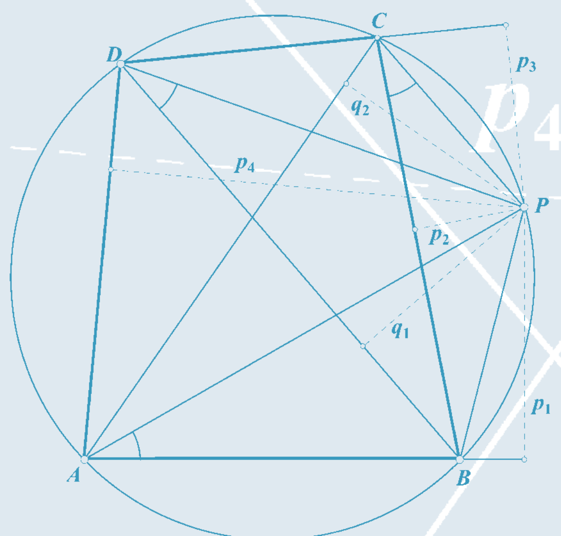
119. ABCD is een koordenvierhoek. P een punt van de cirkel ABCD.

a. Bewijs dat de afstanden van P tot AB en BC zich verhouden als $\overline{PA}$ en $\overline{PC}$.

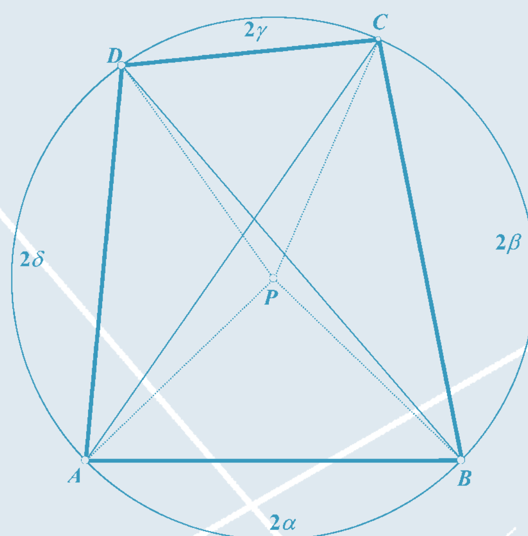
b. Bewijs dat de afstanden van P tot AB en BD zich verhouden als $\overline{PA}$ en $\overline{PD}$.

c. Bewijs dat de produkten van de afstanden van P tot AB en CD, AD en BC, AC en BD evengroot zijn.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3

EEN ZOEKTOCHT IN MEETKUNDELAND

Over de oppervlakten van driehoeken die in verband staan met een vierhoek

[Kees Jonkers]

Vraagstelling

De leraren van het voortgezet onderwijs uit het midden van de vorige eeuw legden bij hun meetkundeonderwijs grote nadruk op de eigenschappen van de driehoek. De in die dagen bekende auteur van wiskundeleerboeken Piet Wijdenes merkte in 1941 al op dat er bij de studie voor het verkrijgen van een onderwijsbevoegdheid wiskunde bij het onderdeel meetkunde wel erg veel nadruk op de driehoek moest worden gelegd. Hij sprak in dat verband zelfs over de 'mikroscopie van de driehoek'. Er was toen ook wel enige aandacht voor speciale vierhoeken zoals bijvoorbeeld de koordenvierhoek, maar eigenschappen van *willekeurige* vierhoeken werden niet behandeld. De verzuchting van Wijdenes haalde niets uit: de 'driehoek-cultus' bleef nog tientallen jaren voortbestaan.
Dit artikel gaat toch weer over driehoeken, maar als uitgangspunt neem ik de vierhoek. Binnen of buiten deze vierhoek wordt een willekeurig punt gekozen. Door dit punt met de hoekpunten te verbinden ontstaan (samen met de diagonalen) zes driehoeken. De vraag is of er een relatie bestaat tussen de oppervlakten van deze driehoeken.

Koordenvierhoeken

In de jaren vijftig verscheen bij J.B. Wolters te Groningen een boekje van 19 bedrukte bladzijden: '*Planimetrische vraagstukken voor de hoogste klassen V.H.M.O.*' De auteur, Dr. W.A.M. Burgers, was leraar aan het St. Aloysius College te 's-Gravenhage. Het was zijn bedoeling de leerlingen voor het vak stereometrie (ruimtemeetkunde) enige hulp te geven bij het toepassen van de vlakke meetkunde. Zijn ervaring was dat menig stereometrisch probleem te moeilijk werd gevonden door gebrek aan vaardigheid op dit gebied. Deze bloemlezing van 150 vraagstukken werd door de schrijver op de volgende manier gebruikt. In de loop van elk trimester moest iedere leerling 15 vraagstukken oplossen. De ervaring was dat leerlingen deze vorm van herhalen waardeerden en soms vóór de vastgestelde datum hun werk inleverden.
De gekozen thema's zijn gelijkvormigheid, hoeken en cirkelbogen, koordenvierhoeken enz. Verschillende vraagstukken zijn zó 'uit de stereometrie geknipt'.
De jongelui konden ook aanwijzingen krijgen over de manier waarop de taak moest worden uitgevoerd.
De auteur schreef in zijn voorwoord: *'Persoonlijk stel ik een grote, goed uitgevoerde tekening op prijs. Gelijkheid van hoeken e.d. mogen op niet storende wijze worden aangegeven en behoeven niet in de tekst te worden verantwoord, zodat alleen de hoofdtrekken van de bewijsvoering overblijven.'*
Een mooi voorbeeld van het thema koordenvierhoek is vraagstuk 119 uit het genoemde boek; zie figuur 1.
Uit figuur 2 blijkt dat bewezen moet worden:

a. $p_1 : p_2 = PA : PC$

b. $p_1 : q_1 = PA : PD$

c. $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = q_1 \cdot q_2$

De eenvoudige bewijzen zijn kennelijk bedoeld de leerling te trainen in het toepassen van het principe 'omtrekshoeken die op dezelfde boog staan, zijn gelijk'.



Piet Wijdenes (1872-1972)

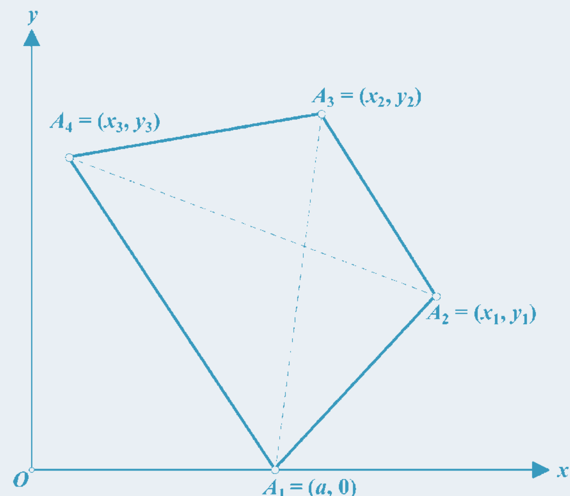
Bij onderdeel *a* geeft dit:
$\sin(PAB) = \sin(PCB) \Rightarrow p_1 : PA = p_2 : PC$, enzovoorts.
Onderdeel *c* kan gebruikt worden om een relatie tussen de oppervlakten van driehoeken op te sporen. Daarvoor heb ik de stelling van Ptolemaeus nodig.
Volgens deze stelling geldt in vierhoek *ABCD*:
$ac + bd = xy$
waarbij $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $x = CA$ en $y = DB$.
Wegens $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = q_1 \cdot q_2$ geldt dus ook:
$p_1 a \cdot p_3 c + p_2 b \cdot p_4 d = q_1 x \cdot q_2 y$
Het is duidelijk dat dit neerkomt op de volgende relatie tussen de oppervlakten (aangegeven met [en]) van zes driehoeken:
$[PAB]\cdot[PCD]+[PBC]\cdot[PAD]=[PAC]\cdot[PBD]$

Deze 'oppervlakteformule' lijkt wel wat op de stelling van Ptolemaeus, maar dan voor oppervlakten.
Bij toepassing van de formule is de lettervolgorde belangrijk. Zo is $[PAB] = -[PBA]$.

De voorwaarden dat *ABCD* een koordenvierhoek is en dat *P* op de cirkel ligt, zijn voor het gekozen bewijs noodzakelijk, maar je kunt je afvragen of de oppervlakteformule een ruimere geldigheid heeft.
Het blijkt bijvoorbeeld dat *P* helemaal *niet* op de cirkel hoeft te liggen.
Laat ik eenvoudigweg voor *P* het middelpunt van de cirkel nemen (zie figuur 3). Er ontstaan dan zes gelijkbenige driehoeken waarvan de oppervlakten gemakkelijk te berekenen zijn met de bekende formule $[ABC]=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
De oppervlakteformule blijkt nu neer te komen op de identiteit:
$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\gamma - \sin 2\beta \cdot \sin 2\delta = \sin 2(\gamma+\delta)\cdot \sin 2(\alpha+\delta)$
met $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^{\circ}$.
(Het minteken wordt veroorzaakt doordat niet alle oppervlakten hetzelfde teken hebben!)
Voor het bewijs ervan vervang ik β door $180^{\circ}-\alpha-\gamma-\delta$. Dit geeft (*):
$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\gamma + \sin 2(\alpha+\gamma+\delta)\cdot \sin 2\delta = \sin 2(\gamma+\delta)\cdot \sin 2(\alpha+\delta)$.

$$
\begin{aligned}
&\sin(y+z)\sin(x+z)-\sin x\sin y=\\
&\quad=(\sin y\cos z+\cos y\sin z)(\sin x\cos z+\cos x\sin z)-\sin x\sin y\\
&\quad=\sin x\sin y\cos^2 z+\cos x\sin y\sin z\cos z+\sin x\cos y\sin z\cos z+\\
&\qquad\qquad+\cos x\cos y\sin^2 z-\sin x\sin y\\
&\quad=-\sin x\sin y(1-\cos^2 z)+\cos x\cos y\sin^2 z+\sin z\cos z\sin(x+y)\\
&\quad=\sin(x+y)\cos z\sin z+\cos(x+y)\sin^2 z\\
&\quad=\big(\sin(x+y)\cos z+\cos(x+y)\sin z\big)\sin z\\
&\quad=\sin(x+y+z)\sin z
\end{aligned}
$$

FIGUUR 4



FIGUUR 5

Om deze uitdrukking eenvoudiger te maken gebruik ik de volgende goniofomule (zie figuur 4 voor het bewijs ervan):

$$\sin(x+y+z)\sin z=\sin(y+z)\sin(x+z)-\sin x\sin y$$

Neem dan $x=2\alpha,\ y=2\gamma,\ z=2\delta$ en het bewijs van (*) is geleverd.
De oppervlakteformule geldt dus ook in het geval dat het punt P als middelpunt van de omgeschreven cirkel wordt gekozen.

Willekeurige vierhoeken

Uit het bovenstaande blijkt dat de voorwaarde dat P op de cirkelomtrek moet liggen, niet beslist noodzakelijk is. Maar is de eis dat de vierhoek een koordenvierhoek is, dat dan wel? Of zou de relatie tussen de oppervlakten van de zes driehoeken ook voor *willekeurige* vierhoeken gelden?
Het antwoord op deze laatste vraag komt als een ware verrassing. Er geldt namelijk:

Laat O een willekeurig punt zijn dat ligt in het vlak van vierhoek $A_1A_2A_3A_4$.
Voor de oppervlakten van de zes driehoeken die O als hoekpunt hebben, geldt:

$$[OA_1A_2]\cdot[OA_3A_4]+[OA_2A_3]\cdot[OA_1A_4]=[OA_1A_3]\cdot[OA_2A_4]$$

Voor het bewijs is de methode van de analytische meetkunde gekozen (zie figuur 5).
Ik neem $O=(0,0)$ en kies de x-as langs OA_1. De coördinaten van de hoekpunten zijn: $A_1=(a,0)$, $A_2=(x_1,y_1)$, $A_3=(x_2,y_2)$ en $A_4=(x_3,y_3)$.
Voor de oppervlakte van een driehoek met hoekpunten $O=(0,0)$, $P=(p_1,p_2)$ en $Q=(q_1,q_2)$ geldt $[OPQ]=\frac{1}{2}(p_1q_2-p_2q_1)$.
Toepassing hiervan:

$$[OA_1A_2]=\tfrac{1}{2}ay_1 \qquad [OA_3A_4]=\tfrac{1}{2}(x_2y_3-y_2x_3)$$
$$[OA_2A_3]=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2) \qquad [OA_1A_4]=\tfrac{1}{2}ay_3$$
$$[OA_1A_3]=\tfrac{1}{2}ay_2 \qquad [OA_2A_4]=\tfrac{1}{2}(x_1y_3-y_1x_3)$$

Als ik de factor $\frac{1}{4}a$ wegdeel, dan luidt het linker gedeelte van de te bewijzen relatie:

$$y_1(x_2y_3-y_2x_3)+(x_1y_2-y_1x_2)y_3=x_1y_2y_3-y_1y_2x_3$$

Het rechter gedeelte wordt dan:

$$y_2(x_1y_3-y_1x_3)=x_1y_2y_3-y_1y_2x_3$$

Het bewijs van de oppervlakteformule is nu dus geleverd.
Dit korte bewijs is een mooi voorbeeld van de effectiviteit van de door Descartes bedachte coördinatenmeetkunde.

Toepassing

De oppervlakteformule blijkt onmisbaar te zijn bij de oplossing van het volgende probleem.
Beschouw de tien driehoeken die ontstaan door de hoekpunten van een vijfhoek te verbinden.
De oppervlakten van vijf ervan zijn onafhankelijk gegeven. Bereken de overige oppervlakten.
Om dit probleem op te lossen kun je vrij gemakkelijk vier onafhankelijke lineaire vergelijkingen opstellen. De vijfde vergelijking, die van de tweede graad is, volgt uit de oppervlakteformule.
Hetzelfde probleem voor een zeshoek met zijn *twintig* driehoeken is natuurlijk veel bewerkelijker.
Voor zeshoek $ABCDEF$ blijkt bijvoorbeeld te gelden:

$$[ABC]\cdot[DEF]+[ACD]\cdot[BEF]=[ABD]\cdot[CEF]+[AEF]\cdot[BCD]$$

Het bewijs gaat weer met analytische meetkunde. Vanwege het uitgebreidere rekenwerk laat ik het maar achterwege.

Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College te Alkmaar.
E-mailadres: cbjjonkers@planet.nl

‘VERTALEN’ IN DE WISKUNDELES

Aandacht besteden aan de vertaling van alledaagse taal in wiskundetaal

[Harrie Broekman]

Onze wetenschappelijke kennis ligt besloten in het woordgebruik waarin over die kennis wordt gesproken.

Spreektaal, schrijftaal, vaktaal

Woorden kunnen in een wiskundige context een andere betekenis hebben dan in de context van een ander vakgebied. Dit betekent dat we alert moeten zijn op misverstanden die zich kunnen voordoen als leerlingen bijvoorbeeld een economische context voorgelegd krijgen om wiskunde te bedrijven. Ze zullen in dat geval de economische context met z’n eigen specifieke vragen moeten ‘vertalen’ in een ‘wiskundige probleemsituatie’, bijvoorbeeld door de vraag te vertalen in vergelijkingen (formuletaal).
In het hier volgende zal een door mij bijgewoonde lessituatie[1] gebruikt worden om dit ‘vertaalaspect’ te beschrijven.

Een les in 6 vwo, wiskunde A1

De les wordt gestart met een blok waarin de leraar samen met de leerlingen aan een opgave werkt[2].
Leraar: ‘Ik wilde vandaag eerst eens samen kijken naar een opgave en ik heb daarvoor som 26 uitgekozen.’ (Zie figuur 1.)
Meerdere leerlingen: ‘Daar ben ik nog niet!’
Leraar: ‘Geeft niet, want je hebt de voorgaande sommen niet echt nodig om toch te leren hoe je zo’n opgave zou aanpakken. Kijk daarom allemaal eerst eens hoe je hem zou aanpakken. Straks kun je weer verder met waar je mee bezig was.’

Opmerking 1. In het gebruikte boek staat, voorafgaand aan opgave 26, een volledig uitgewerkt voorbeeld. De leraar kiest er kennelijk voor om geen aandacht te schenken aan dit uitgewerkte voorbeeld, ondanks het gegeven dat dit voorbeeld wordt afgesloten met een blokje formules die nodig zijn voor deze opgave. Het betreft de volgende formules:

Formules in de economie
Prijs-afzetfunctie: $p = aq + b$
Opbrengst: $R = pq$
Winst: $W = R - K$

Opmerking 2. De leraar vertelde me achteraf dat hij de leerlingen niet expliciet op het volledig uitgewerkte voorbeeld wilde wijzen om te voorkomen dat ze dit ‘slaafs zouden gaan volgen’. Hij wilde ze zelf de keuze laten om er naar te kijken als ze daar behoefte aan zouden hebben bij het werken aan de opgave.

Na ca. 5 minuten:
Leraar: ‘Goed, even weer samen kijken… Is de vraag voor iedereen duidelijk? Wat je doen moet?’
Leerling 1: ‘Niet helemaal.’
Docent: ‘De eerste vraag; wat is de dagopbrengst?’
Leerling 2: ‘Prijs maal aantal.’

En hier gebeurt iets wat de leraar in feite niet wilde toen hij zijn opdracht gaf om eerst eens te kijken hoe de opgave aangepakt zou kunnen worden. Want over de start, die aanpak, wordt niet meer expliciet gesproken.

Eerst lezen en je inleven in de situatie

Juist het lezen van de opgave, het inleven in de situatie, is van groot belang voor het vervolg. Het

Opgave 26
Een fabrikant verkoopt 400 artikelen per dag bij een prijs van 28 euro. Verlaagt hij de prijs tot 20 euro, dan neemt de verkoop toe tot 1200 stuks. Bij de productie gaat hij uit van een bedrag van 1500 euro aan vaste kosten per dag. De variabele kosten zijn 16 euro per artikel. Neem aan dat de prijs p in euro een lineaire functie is van het verkochte aantal q.

a. Geef de formule van de dagopbrengst R in euro als functie van q.

b. Bij welke prijs is de opbrengst R gelijk aan 24000 euro?

FIGUUR 1

Opgave 16
Fruittelers bespuiten regelmatig hun fruitbomen met insecticiden om aantasting van het fruit tegen te gaan. De opbrengst P in kg van een gemiddelde perenboom hangt af van de hoeveelheid gebruikte insecticide x per oogst. Hierbij is x in een geschikte eenheid. Er geldt:

$$P = 150 - \frac{50}{1+x} \quad \text{met } 0 \leq x \leq 10$$

a. Neem aan dat er niet bespoten wordt. Hoeveel is dan de opbrengst?

FIGUUR 2

gebruik van een mengsel van taal uit het dagelijks leven en 'wiskundeformuletaal' in de tekst van het boek maakt het noodzakelijk, eerst aandacht te besteden aan het inleven in de situatie en het vertalen van die situatie in een wiskundige vraagstelling.
De leesbaarheid van de opgave bepaalt in belangrijke mate mede de mogelijkheid om met de leerlingen een leerzaam gesprek te voeren. Hoe zit dat bij deze opgave, als we er vanuit gaan dat de leerlingen het uitgewerkte voorbeeld niet bestudeerd hebben?

Het eerste deel van de tekst van opgave 26 is voor een 6-vwo-leerling, ondanks de wat kromme taal die gehanteerd wordt, te lezen en te begrijpen (in de zin van: niet alleen verstandelijk te begrijpen maar ook in te voelen), ook al zal de inhoud door de leerling geordend moeten worden. Dit gebeurt later door de docent op het bord via:
$p = 28$, $q = 400$
$p = 20$, $q = 1200$
Maar hoe zit dat met die zin '*Neem aan dat de prijs p in euro een lineaire functie is van het verkochte aantal q*'? Wat daarmee bedoeld wordt in 'alledaagse taal' of in wiskundetaal, wordt niet besproken voordat er aan het beantwoorden van de vraag begonnen is, en dan alleen door middel van de formule $p = aq + b$. Maar wat dat 'betekent'? Zonder bestudering van het genoemde voorbeeld zullen maar weinig leerlingen hier iets mee kunnen.

De leraar schrijft op het bord $R = pq$ en zegt:
'Oké, geef R, de dagopbrengst, als functie van q. *Wat betekent dat? R als functie van q?*'

En dan zwijgen de leerlingen tot de leraar vraagt: 'Staat hier R als functie van q?' Een leerling reageert met: 'Nee, p staat er nog.'

Het is de leraar die hard werkt, mede omdat hij weet dat een interpretatie- en 'vertaal'-probleem het oplossen van deze opgave bemoeilijkt. Maar over dat vertaalprobleem wordt niet expliciet gesproken, alleen indirect. Mijns inziens is dat een gemiste kans. Zowel leraar als leerlingen zwijgen hier over.
Achteraf waren wij - de leraar en ik - het er over eens dat het jammer was dat hij bij het 'maken van de opdrachten' instapte bij wat de leerlingen aan het doen waren: de concrete beantwoording van de vragen. Dit is extra jammer omdat in een later deel van de les een aantal leerlingen opnieuw tegen de lees- en vertaalproblemen bij het begin van een opgave aan liepen.

Vertaalproblemen worden genegeerd

Een tweetal leerlingen is in het tweede deel van dit 75 minuten durende lesuur bezig met opgave 16; zie figuur 2. Deze tekst is een nog duidelijker voorbeeld van de combinatie van twee talen (dagelijks leven en wiskunde) dan opgave 26:
- de opbrengst P in kg van een gemiddelde perenboom,
- de hoeveelheid gebruikte insecticide x per oogst,
- 'hierbij is x in een geschikte eenheid',
- en dan zo'n 'prachtige' formule...
Daarenboven lijkt toch ook wel enige kennis van het fruittelen en het fruit bespuiten verondersteld bij het interpreteren van de tekst.
Leerling 1: 'Ja, ze zeggen het allemaal zo ingewikkeld. Opbrengst in kg, maar wat is x?'

Leerling 2: 'Het begin is voor mij daarom altijd het moeilijkst. Als ik eenmaal bezig ben met een som, dan gaat het wel.'
Leerling 1: 'Waarom zeggen ze niet gewoon waarom het gaat? Een aantal flesjes, of liter, of kilo's van die pesticide...'
Leerling 3: 'Het uitvlooien van die tekst is het moeilijkst, daarom begin ik maar direct met de vraag. Als dat niet lukt kijk ik bij de antwoorden of dat helpt, anders probeer ik vraag (b), of ik vraag het aan de leraar. Thuis ga ik gewoon door naar de volgende som.'
En dat is iets dat beslist niet alleen de leerlingen van deze leraar doen: *De leerlingen proberen het vertaalprobleem te negeren door het leeswerk over te slaan en direct te gaan 'oplossen'.* Als leraar ga je daar dan in de bespreking van de opgaven vaak (ongewild) in mee, zeker als je de leerlingen zo veel mogelijk zelf wilt laten doen. Dit beseffen is een mogelijke eerste stap naar verandering van je lesgeefgedrag.

Het vertaalaspect; reflectie

Ook al is de leerstof 'gegeven' door het boek, als docent(e) heb je de vrijheid om accenten te leggen daar waar je denkt dat je leerlingen er het meest profijt van hebben. Dat is beslist niet altijd zo eenvoudig als het voor buitenstaanders lijkt: het vereist namelijk dat je je los kunt maken van het vanzelfsprekende volgen van het boek, naar je leerlingen kunt luisteren en alternatieven tot je beschikking hebt. Maar zeker zo belangrijk is de wil en de energie om als docent te blijven proberen de onderwijssituatie te zien als een uitdaging. Niemand zal ontkennen dat het helpen van leerlingen met wiskunde een complexe maar tevens uitdagende bezigheid is.
Een van die uitdagingen betreft het aandacht schenken aan het hier aangestipte vertaalprobleem: veel teksten in de boeken bevatten een wat kromme combinatie van 'alledaagse taal' en wiskundetaal (symbolen, formules e.d.), en daar moeten de leerlingen mee leren werken. Leerboekauteurs hebben m.i. nog geen andere oplossing om tegemoet te komen aan de behoefte aan beide talen.
Juist het lezen van de leerboekteksten en het vertalen daarvan in een meer wiskundige taal vereist, evenals het vertalen vanuit wiskundetaal naar alledaagse taal, veel aandacht van leerlingen. En dus ook tijd en aandacht van ons, leraren in de bètavakken.

Noten

[1] De docent, Henk Teunissen van het Koningin Wilhelmina College te Culemborg, heeft toestemming gegeven voor het gebruik van zowel de lesobservaties als delen van ons nagesprek.
[2] Onderzoekers, bijvoorbeeld de Amerikanen Lester (1989) en Schoenfeld (1992), gebruiken voor de beschrijving van leraar-activiteiten die het probleemoplossen ondersteunen een driedeling 'voor-tijdens-na' het oplossen van het probleem. Als activiteiten vóór het oplossen (ik zou zeggen 'aan het begin') noemen zij:
1. Read the problem, discuss words or phrases students may not understand. (Purpose: illustrate the importance of reading carefully, focus on special vocabulary.)
2. Use whole-class discussion to focus on importance of understanding the problem. (Purpose: Focus on important data, clarification process.)
3. (optional) Whole-class discussion of possible strategies to solve a problem. (Purpose: Elicit ideas for possible ways to solve the problem.)

Over de auteur

Harrie Broekman heeft 7 jaar als leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs gewerkt. Daarna heeft hij gedurende 36 jaar gewerkt als lerarenopleider en vakdidactisch onderzoeker aan de Universiteit van Utrecht. Op dit moment is hij nog beperkt betrokken bij een samenwerkingsproject voor bètadocenten aan het KWC te Culemborg en bij de opzet van een onderwijsvernieuwing in Polen en enkele andere EU-landen.
E-mailadres: H.G.B.Broekman@phys.uu.nl

DE MEETKUNDE VAN DE MEETKUNDIGE REEKS

[Jan van de Craats]

In het laatste decembernummer heeft Dick Klingens mooie meetkundige constructies gegeven van de somformule van een meetkundige rij (zie [1]). Dat is leuk omdat veel leerlingen zich wel eens zullen hebben afgevraagd wat er eigenlijk voor meetkundigs aan die rij is. Met de gebruikelijke korte algebraïsche afleidingen van de somformules is niets mis (zie bijvoorbeeld [2], p. 61), maar een plaatje geeft toch altijd weer een nieuwe kijk op de zaak. Zonder de pretentie origineel te zijn laat ik hier een andere mogelijkheid zien. Net als Dick beperk ik me in mijn plaatjes tot meetkundige rijen met beginterm 1, dus tot rijen van de vorm 1, r, r^2, r^3, ...

In figuur 1 heb ik $0 < r < 1$ genomen.
Eigenlijk is een verdere uitleg bijna overbodig. Je ziet een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ waarbij $f(x) = 1 + rx$ genomen is met startwaarde $x_0 = 1$. De opvolgende iteraties x_1, x_2, ... zijn direct uit de figuur af te lezen: via de diagonaal $y = x$ worden de functiewaarden $f(x_n)$ telkens naar de x-as overgebracht. Dat is een bekende truc uit de voortgezette analyse.

Omdat

$$x_1 = f(x_0) = 1 + rx_0 = 1 + r$$
$$x_2 = f(x_1) = 1 + rx_1 = 1 + r(1+r) = 1 + r + r^2$$

...

geldt voor alle n dat $x_n = 1 + r + \cdots + r^n$.
De x_n zijn dus de partiële sommen van de meetkundige reeks. Ze convergeren naar de x-waarde s van het snijpunt van de lijnen $y = 1 + rx$ en $y = x$. Daaruit valt s direct te berekenen, maar je kunt het ook in de figuur zien: het wemelt daar namelijk van de gelijkvormige rechthoekige driehoeken met een schuine zijde met richtingscoëfficiënt r. In het bijzonder is $(s - 1) : s = r : 1$, waaruit volgt dat $s = 1/(1 - r)$.

Het geval $-1 < r < 0$ gaat precies zo (zie figuur 2). Je hoeft helemaal niets aan de toelichtende tekst te veranderen; alleen moet je goed op de tekens letten. Ook de formule voor de eindige meetkundige reeks is direct uit de plaatjes af te lezen. Merk daartoe op dat $x_{n+1} - x_n = r^{n+1}$ (zie de treden van de trap). De rechthoekige driehoek met hoekpunten (0,1), $(x_n,1)$ en $(x_n,f(x_n)) = (x_n,x_{n+1})$ leert dat $x_{n+1} - 1 = rx_n$, terwijl tevens geldt dat $x_{n+1} = x_n + r^{n+1}$. Hieruit kun je x_n oplossen:

$$x_n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$$

Het aardige is dat deze formule voor *alle* $r \neq 1$ geldt, want ook als $|r| \geq 1$ kun je zo'n plaatje maken. Alleen convergeert het proces dan niet meer.

Wat ik hierboven gedaan heb, is het iteratief bepalen van de oplossing van de vergelijking $x = f(x)$ in het geval $f(x) = 1 + ax$. Dezelfde methode kan voor willekeurige functies $f(x)$ geprobeerd worden. Als $f(x)$ differentieerbaar is en als voor de oplossing $x = s$ geldt dat $|f'(s)| < 1$, krijg je convergentie mits de startwaarde x_0 voldoende dicht bij s ligt.

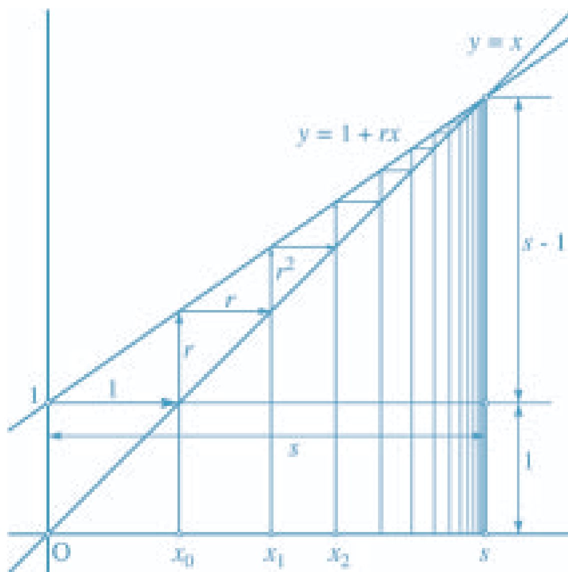
Literatuur

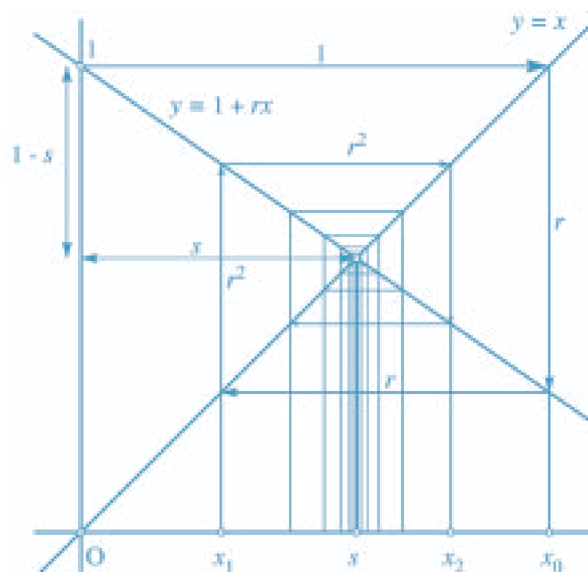
[1] Dick Klingens: Een meetkundige constructie van de som van een meetkundige rij. In: Euclides 81(3), december 2005; pp. 138-141.

[2] Jan van de Craats, Rob Bosch: Basisboek Wiskunde. Amsterdam: Pearson Education Benelux (2005); ISBN 90-430-1156-8.

Over de auteur

Jan van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit.
E-mailadres: craats@science.uva.nl





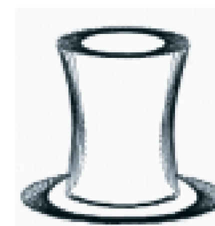
FIGUUR 1 De somformule voor een meetkundige rij met $0 < r < 1$

FIGUUR 2 De somformule voor een meetkundige rij met $-1 < r < 0$

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR

Internationaal Standaard Boeknummer (ISBN)

[Job van de Groep]



Inleiding

Goochelaars gebruiken soms rekenkundige trucjes. Door de wijze van presentatie - en dat is bij goochelen het belangrijkst! - kunnen die op zich vaak eenvoudige foefjes een magische uitstraling krijgen. Ze roepen daardoor nieuwsgierigheid en verwondering op.
De klassensituatie is een uitstekend decor voor een dergelijk mysterieus gedoe - het publiek is al aanwezig! Ook in deze jaargang van Euclides[1] wil ik u enkele goocheltrucs presenteren. In deze aflevering staat een truc centraal die gebaseerd is op het ISBN-systeem[2]. Abracadabra!

Verloop van de truc; ISBN-10

Op verzoek van de goochelaar schudt een toeschouwer een spel speelkaarten. Het stapeltje wordt daarna blind op tafel gelegd. Een andere toeschouwer pakt een willekeurig boek en noteert daarvan het ISBN op een schoolbord of flip-over, maar zonder het laatste cijfer. (De X stelt het getal 10 voor.) Als dat laatste cijfer een nul is, dient een ander boek te worden gepakt.
De toeschouwers gaan nu samen, het liefst zonder hulp van de rekenmachine, de volgende berekening uitvoeren: het eerste ISBN-cijfer (voor boeken uit het Nederlandstalige gebied is dat altijd een 9) wordt met 10 vermenigvuldigd, het tweede cijfer met 9, het derde met 8, enzovoort. Die negen producten worden vervolgens bij elkaar opgeteld en de som wordt gedeeld (staartdeling!) door de waarde van de bovenste kaart op het stapeltje (boer = 11, ..., aas = 1). De rest na deling is het getal r.
Van het overgebleven stapeltje speelkaarten wordt van bovenaf de r-de kaart opgezocht. Op die kaart blijkt nu het laatste, weggelaten cijfer van het betreffende ISBN te staan!

Het geheim

Deze truc is gebaseerd op de officiële berekening van het zogenoemde controlecijfer van een ISBN. Dat is het laatste cijfer van een ISBN.
De goochelaar heeft onzichtbaar voor het publiek in zijn hand elf *opeenvolgende* speelkaarten gepalmeerd die ongemerkt (oefenen!) op het stapeltje worden gelegd. De volgorde is zó dat de bovenste (blinde) kaart van het stapeltje een boer is, daaronder een 10, daaronder een 9, vervolgens een 8, enzovoort. Dat betekent dus dat de deler altijd 11 is. (Met hetzelfde publiek is de goocheltruc dus niet voor herhaling vatbaar.) Opgeteld bij de berekende som, zorgt het controlecijfer ervoor dat de totale som een 11-voud wordt.
Voorbeeld.
Het ISBN van mijn boekje *Gegoochel met Getallen* (Houten: EPN) is 90-11-09944-3. De volgende som wordt berekend:
$10 \times 9 + 9 \times 0 + 8 \times 1 + 7 \times 1 + 6 \times 0 + 5 \times 9 + 4 \times 9 + 3 \times 4 + 2 \times 4 = 206$
De deling door 11 geeft 18 met als rest 8 ($18 \times 11 + 8 = 206$, $206 + 3 = 209 = 19 \times 11$). Van het overgebleven stapeltje met 10 kaarten wordt de achtste kaart van boven opgezocht en omgedraaid. Daarop blijkt dan het getal 3 te staan. De som van het rangnummer van de kaart en het getal óp die kaart is dus telkens 11.
Er kan natuurlijk ook alleen gewerkt worden met het stapeltje van 11 opeenvolgende kaarten, die dan gewoon op tafel gelegd worden. De truc is dan wel aanmerkelijk minder mysterieus.

ISBN-13

Met ingang van januari 2007 wordt een 13-cijferig ISBN ingevoerd en wijzigt ook de berekening van het controlecijfer (13e getal). Eerst worden alle cijfers op de even plaatsen (2e, 4e, 6e, 8e, 10e en 12e) met 3 vermenigvuldigd. De uitkomsten daarvan worden vervolgens bij de andere zes cijfers opgeteld. Het controle-cijfer moet van die som tenslotte een 10-voud maken.
Bestaande ISBN's worden naar een nieuw ISBN-13 omgezet, door 978 of 979 vóór het bestaande nummer te plaatsen en het controlecijfer opnieuw te berekenen.
Voorbeeld.
90-11-09944-3 (ISBN-10) wordt dan 978-90-11-09944-9 (ISBN-13), want
$(7 + 9 + 1 + 0 + 9 + 4) \times 3 +$
$(9 + 8 + 0 + 1 + 9 + 4) = 121$
Het controlecijfer wordt 9, want het eerstvolgende 10-voud is 130.
Indien gewerkt wordt met een ISBN-13, moet van het stapeltje van 11 'geheime', geprepareerde kaarten de bovenste kaart (met de boer) worden verwijderd.

Transfer naar de les

Bij deze truc komt het kenmerk van deelbaarheid door 11 en modulo-rekenen om de hoek kijken.
Kan met behulp van het controlecijfer een eventuele typefout in een ISBN-10 worden opgespoord? Zo ja, hoe dan? Is het mogelijk het foute cijfer te detecteren als zeker is dat het controlecijfer in elk geval wél klopt? En als er twee typefouten worden gemaakt? Hoe waterdicht is de foutcontrole van een ISBN-13 in dit verband?

Noten (red.)

[1] Eerdere afleveringen van deze rubriek verschenen in Euclides 80-4 (januari 2005), 80-7 (mei 2005), 80-8 (juni 2005) en 81-3 (december 2005).

[2] Zie ook 'Nullen en enen' door Ernst Lambeck op pag. 276.

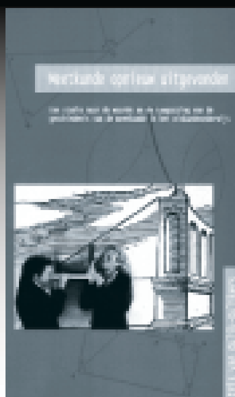
Over de auteur

Job van de Groep is, behalve wiskundedocent en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein, ook amateur-goochelaar.
E-mailadres: jvdgroep@wxs.nl

MEETKUNDE OPNIEUW UITGEVONDEN

Een boekbespreking van 'Een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs'.

[Danny Beckers]



'Meetkunde opnieuw uitgevonden'
Auteur: Iris van Gulik-Gulikers
Proefschrift Groningen (2005)
Prijs: € 10,00 (€ 3,00 verzendkosten)
Bestellen via: gulikgulikers@home.nl

Geschiedenis van de wiskunde in het onderwijs

Het zal de meeste wiskundeleraren hopelijk niet zijn ontgaan dat er de laatste jaren door historici van wiskunde stevig aan de weg wordt getimmerd, in een poging hun vak dienstbaar te maken aan het curriculum van het voortgezet onderwijs. Het epicentrum van deze beweging ligt in Groningen, waar Jan van Maanen de ene na de andere student weet te bewegen experimenten te ontwerpen op dit vlak. Nu is er ook een Gronings proefschrift, van de hand van Iris van Gulik, waarin een studie wordt gepresenteerd naar de resultaten van toepassing van geschiedenis in het wiskundeonderwijs. Volgens de leeswijzer die in het proefschrift is opgenomen, is het hele boek, met uitzondering van een bijlage, interessant voor (wiskunde)leraren. Volgens diezelfde leeswijzer zouden historici en wiskundigen ook interesse voor de bijlage moeten hebben. Voor mij aanleiding om het gehele boek door te nemen.

Overzicht

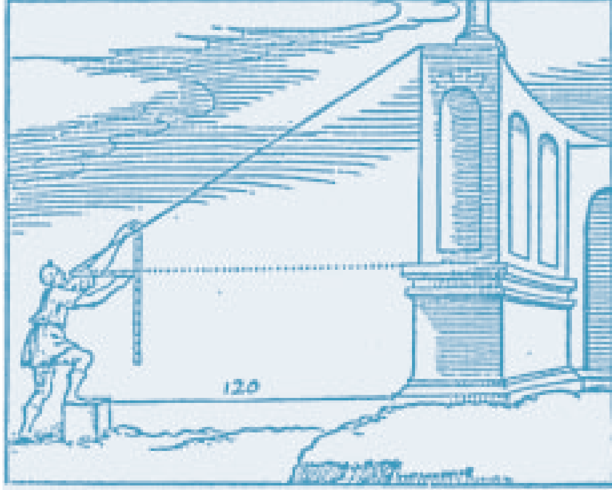
In het proefschrift wordt, na een inleidend hoofdstuk (H1), eerst een overzicht gegeven van de verschillende redenen die in de literatuur worden genoemd als motivatie om geschiedenis in het wiskundeonderwijs te gebruiken. Dit hoofdstuk (H2) betreft een (Engelstalig) artikel dat eerder door de auteur, samen met Klaske Blom, in de *Educational Studies of Mathematics* is gepubliceerd. Daarin wordt ook ingegaan op de verschillende wijzen waarop geschiedenis valt in te zetten in de wiskundeles. Vervolgens concentreert de auteur zich specifiek op de meetkunde, en stelt ze zich de vraag in hoeverre geschiedenis van meetkunde gebruikt kan worden, door leerling en leraar, bij het 'opnieuw ontdekken' van meetkunde.
Twee grote experimenten liggen ten grondslag aan de bevindingen die in het proefschrift worden gepresenteerd. In twee hoofdstukken (H3 en H4) worden eerst de historische achtergronden van die twee projecten toegelicht. Dan volgen twee hoofdstukken (H5 en H6) waarin de resultaten van de beide projecten zowel kwalitatief als kwantitatief worden geanalyseerd. Tot slot is er een hoofdstuk met conclusies en aanbevelingen (H7).

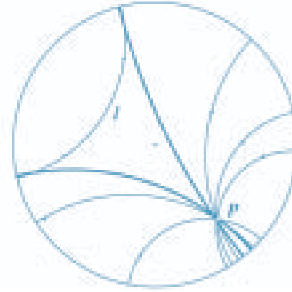
Twee projecten

De twee projecten waarop dit proefschrift gebaseerd is, zijn door Van Gulik zelf ontworpen en getoetst. Het betreft op de eerste plaats een lesproject van tien lessen in de tweede en derde klas havo/vwo, getiteld *De 17e-eeuwse Nederlandse landmeter in de klas.* Dit project werd op 46 scholen uitgeprobeerd. Het tweede betreft *Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde*, dat op 8 scholen in 5- of 6-vwo werd uitgeprobeerd. Het schriftelijk materiaal van beide projecten is door Van Gulik ook voor iedereen beschikbaar gesteld. Voor wie het nog niet wist: het eerste valt te bekijken op de website van Van Gulik[1], het tweede is door haar gepubliceerd in de vorm van een Zebraboekje[2] – een aanrader!

Historie als middel

De historische hoofdstukken (3 en 4) zijn hoofdzakelijk geschreven op basis van oude, deels zelfs verouderde, historische literatuur. Als historicus tref je daar dus niets nieuws aan, maar trek je af en toe juist de wenkbrauwen op. Zo vond ik het treffend om over de axioma's en postulaten van Euclides te lezen (p. 74): 'Euclides vindt deze uitgangspunten nodig en voldoende als fundament waarop het hele bouwwerk van de meetkunde door logische redenering kan worden





opgebouwd. Bij andere uitgangspunten ontstaat er een andere, "nieuwe" meetkunde.' Euclides heeft bij mijn beste weten nooit aan een andere meetkunde gedacht, dus dit is een curieus gekozen formulering.

Alle historische fijnslijperij ten spijt, moet ik (met enige jaloezie) constateren dat de verhalen van Van Gulik vervolgens in hoofdstukken 5 en 6 in concreet en leuk lesmateriaal worden omgezet. Leerlingen worden geënthousiasmeerd door het lesmateriaal – weliswaar niet allemaal, maar toch. Blijkbaar is de wijze les die hier te leren valt, dat wanneer we geschiedenis van wiskunde dienstbaar willen maken aan het onderwijs, we de historische finesses achterwege moeten laten. Het gaat tenslotte om de *wiskunde*les; de geschiedenis op zich is geen doel maar een middel – volgens het door Van Gulik expliciet geformuleerde uitgangspunt. Maar het maakt het wel extra wrang dat de vakintegratie met geschiedenis en Nederlands (die laatste ten behoeve van het lezen van oud-Nederlandse teksten), zoals Van Gulik constateert (pp. 125-126), niet gemakkelijk van de grond komt.

Effecten op effectiviteit

Het leukste onderdeel vond ik persoonlijk het hoofdstuk met conclusies en aanbevelingen. Een dappere en hele nuttige aanvulling, die in menig proefschrift ontbreekt (in elk geval in elk historisch proefschrift). Van Gulik bekijkt, op basis van kwantitatieve en kwalitatieve gegevens, wat de effecten zijn van verschillende factoren op effectiviteit van haar lesmethode. Factoren als leeftijd en niveau van de leerlingen en de motivatie van de docent worden besproken. Van Gulik brengt handig onderscheid aan tussen verschillende typen leerlingen: leerlingen die van verhaalsommen houden of juist niet, leerlingen die wiskunde gemakkelijk vinden of juist moeilijk, etcetera. De kwantitatieve vergelijking is gebaseerd op (o.a.) een analyse van cijfers die een maat geven voor motivatie en interesse voor wiskunde, voor en na het onderwijsexperiment. Het zou nuttig zijn geweest om óók vergelijkend onderzoek te doen naar het prestatieniveau van de leerlingen. Je zou hopen dat de extra 'historische' reflectie op de niet-Euclidische meetkunde bij leerlingen bijvoorbeeld een positief effect zou hebben op de score voor de bewijsopgaven op het examen. Dit was eenvoudig te meten geweest door een groep leerlingen in het cijfermateriaal te betrekken die niet aan het experiment hadden deelgenomen. Dit betekent vooral dat Van Gulik voorlopig nog vooruit kan met haar onderzoek.

Uitgangspunt?

Wat ik echt miste was een reflectie op het uitgangspunt van deze (en eerdere) studie(s): de bedoeling is dat leerlingen 'herontdekken' wat eerder al door anderen is uitgevonden. De geschiedenis dient daarbij als leidraad. Maar de geschiedenis leert ook dat die ontwikkeling helemaal niet zo vanzelfsprekend is. Persoonlijk vind ik het heerlijk als leerlingen met een alternatieve oplossingsmanier komen – daar heb je op zich ook geen geschiedenis voor nodig. Maar wanneer je geschiedenis op deze wijze wilt inzetten voor gedeelten uit een leerlijn, dan weet je als docent stiekem al waar je uit wilt komen. Het lijkt me bijvoorbeeld onwenselijk wanneer waardering voor alternatieve oplossingen zou uitmonden in een alternatieve notatiewijze. In de geschiedenis hebben tal van notatiewijzen naast elkaar bestaan; uniformering daarin is pas relatief laat van de grond gekomen. Als docent ben je dus selectief in wat je uit de geschiedenis wel en niet gebruikt. In hoeverre is er dan werkelijk sprake van herontdekken dankzij geschiedenis? Ik heb veeleer de indruk dat er sprake is van didactische inspiratie uit een geschiedenis. Alleen in het tweede hoofdstuk, waarin de meningen omtrent het nut van de integratie van geschiedenis in de wiskundeles aan bod komt, wordt deze kwestie aangestipt; besproken wordt die niet.

Werkmateriaal

Samenvattend is de studie van Iris van Gulik de moeite van het lezen waard. Bovenstaande tekortkomingen zijn theoretisch interessant, maar voegen niet veel toe aan de onderwijspraktijk die met dit werk gediend is. Wie

zelf de experimenten met leerlingen heeft uitgevoerd, krijgt in het boek een bredere kijk gepresenteerd op het onderzoek. Wie nog niet aan de experimenten heeft deelgenomen, wordt tijdens het lezen wellicht gestimuleerd om alsnog de hand aan de ploeg te slaan. Het werkmateriaal is nu voorhanden. Alleen al dat is een stuk winst waar menig promotieproject niet op kan bogen. Het proefschrift is voor een schijntje te koop via de internetpagina van de auteur[1]. Voor het lesmateriaal uit het Zebradeeltje moet u naar de boekhandel[2]. Het proefschrift leent zich niet om lesmateriaal uit te gaan samenstellen; dat vereist meer voorkennis. Zo word je voor *De Elementen* van Euclides bijvoorbeeld verwezen naar de editie die Dijksterhuis daarvan in 1929/30 verzorgde. (In het Zebraboekje staan verwijzingen naar bruikbare internetpagina's.) Afgezien van het probleem dat dit boek inmiddels een verzamelaarsobject is, is het voor de huidige generatie leerlingen totaal ongeschikt. Niet zozeer vanwege het taalgebruik, als wel omdat Dijksterhuis er in zijn tijd nog vanuit kon gaan dat alle lezers de Euclidische bewijzen goeddeels kenden. Wat het proefschrift wél te bieden heeft, is een hoop ideeën en enthousiasme voor de integratie van geschiedenis in de wiskundeles en aandacht voor de valkuilen en mogelijkheden van verschillende werkvormen daarbij. Dat lijken me goede redenen om dit boek aan te schaffen.

Noten

[1] http://members.home.nl/gulikgulikers
[2] Iris van Gulik-Gulikers: Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2005); Zebrareeks, deel 21.

Over de recensent

Danny Beckers is wetenschapshistoricus. Hij is als universitair docent verbonden aan de Faculteit Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit Amsterdam. Daarnaast heeft hij een eigen bedrijf in de begeleiding van hoogbegaafde mensen met stoornissen in het autistisch spectrum. Zijn interesse gaat onder andere uit naar de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: d.beckers@inter.nl.net

DE NATUURWETTEN, ICONEN VAN ONZE KENNIS

Een boekbespreking

[Jan de Graaf]



'De natuurwetten, iconen van onze kennis'
Auteur: Sander Bais
Uitgever: Salomé, Amsterdam University Press (2005)
ISBN 90 5356 7143
96 bladzijden
Prijs € 14,95

Vergelijking als kunstwerk

'*Wiskunde als taal van de natuur*' is de beginregel van dit boekje dat beoogt een beknopte beschrijving te geven van 'hoe de natuur werkt'. Daartoe presenteert de auteur een set basisvergelijkingen (in wiskundige vorm) die ten grondslag ligt aan de klassieke en moderne fysica. Alle grote gebieden binnen de fysica worden hierbij aangestipt.

Startpunten zijn de klassieke mechanica (Newton) en elektromagnetisme (Maxwell). Van daaruit worden drie gebieden verkend:
1. Kinetische theorie, thermodynamica en stromingsleer;
2. Kwantumtheorie (oud en modern);
3. Relativiteitstheorie (speciaal en algemeen).
Ten slotte komen de gebieden 2 en 3 elkaar weer tegen bij de snaartheorie.
Na een beknopte inleiding tot 'formuletaal' (typografisch lijkt dit op een beetje calculus plus een beetje algebra) worden de basisvergelijkingen van voornoemde gebieden getoond en fysisch besproken. De basisvergelijkingen worden telkens getoond op oranjebruine rechterpagina's en ogen als kunstwerken (LaTeX-art; zie figuur 1). En dat zijn ze ook! Gaandeweg zal echter een en ander voor de doorsneelezer wel steeds mysterieuzer worden. Om het betoog te kunnen vatten mag je vooral niet

formuleblind zijn en je moet ook enig besef hebben van wat een (partiële) differentiaalvergelijking is. Voor vwo-leerlingen met intellectuele neigingen en dus ook voor vwo-wiskundeleraren met wat bredere interesse is dit een zeer aantrekkelijk boekje om kennis van te nemen. Immers, de breedte en diepgang van wiskundige toepassingen in fysica en techniek overtreffen ruimschoots alle overige toepassingen bij elkaar.

Opmerkingen

Ik vind dit een mooi boek. Er zijn echter een aantal gemiste kansen en kleine onjuistheden, juist op het niveau van eenvoudig uit te leggen zaken. Ik ben zo vrij er daarvan enkele te noemen.

- *Oriëntatie en elektrozwakke wisselwerking*

Bij de introductie van het uitwendig vectorproduct (pagina 30) blijft de richting ervan (oriëntatie) ongedefinieerd. Hier had een mooie beschouwing aan vastgeknoopt kunnen worden over de vraag of de natuurwetten in de spiegel dezelfde zijn als in de echte wereld én dat was goed van pas gekomen op pagina 86, waar over 'linkshandige' en 'rechtshandige' spincomponenten van Dirac-deeltjes gesproken wordt.

- *Elektromagnetische velden*

De extra term (diëlektrische verschuivingsstroom) die Maxwell aan de Wet van Ampère toevoegde, wordt door ingenieurs bij het ontwerpen van transformatoren en elektromotoren tot op heden weggelaten. De reden hiervoor is eenvoudig kwantitatief uit te leggen: een mooie 'orde-van-grootteberekening' met natuurconstanten. Ook ontbreken, ter plekke, beschouwingen over Galileï-invariantie versus Lorentz-invariantie. Hierbij had gemeld kunnen worden dat Maxwell, op basis van zijn elektromagnetische theorie, de speciale relativiteitstheorie had kunnen ontdekken.

- *Elektromagnetische golven*

Op pagina 41 staan twee afzonderlijke doch identieke golfvergelijkingen afgedrukt waaraan tijdsafhankelijke elektrische respectievelijk magnetische velden moeten voldoen. Zonder nader commentaar ontstaat hier het levensgrote misverstand dat, bijvoorbeeld, tijdsafhankelijke elektrische velden solo kunnen bestaan, zonder magnetisch gezelschap. In strijd met Maxwell!

- *De 2e hoofdwet van de thermodynamica*

Deze wet wordt wat omslachtig behandeld op pagina 47. Waarom staat hier niet eenvoudig dat een glas water op een koude tafel niet aan de kook kan raken door warmte aan de omgeving te onttrekken? Alhoewel daar energetisch geen bezwaar tegen zou zijn!

- *De tweelingparadox*

Het jonger zijn van het thuiskomende tweelingbroertje komt niet omdat hij met 'hoge snelheid' reist, pagina 62, maar omdat hij, in tegenstelling tot de thuisblijver, versnellingen ondervindt. Met andere woorden: omdat de condities waarin elk der tweelinghelften vertoeft niet uitwisselbaar zijn is er *geen paradox*; de thuisblijver zit steeds in een inertiaalstelsel en de reiziger niet!

- *Algemene relativiteitstheorie*

Op pagina 6 lees ik: 'Het is een taal [d.w.z. de wiskunde; JdG], die trouwens regelmatig moest worden uitgebreid wanneer dieperliggende lagen van de fysische werkelijkheid werden blootgelegd.' Natuurkundigen hebben veelal de neiging, ook in het onderhavige boek, de rol van de zuivere wiskunde wat on(der)belicht te laten! Einstein zelf overigens niet. Zonder de differentiaalmeetkunde van de late 19e eeuw, zo meldt Einstein, had hij zijn inzicht dat er verband is tussen kromming van de ruimte enerzijds en de aanwezigheid van massa/energie ter plekke anderzijds, niet in wiskundige vorm kunnen gieten.

- *Perihelionverschuiving van Mercurius*

Planetenbanen lagen, indien uitsluitend onderworpen aan Newtonse gravitatie, al niet stil in de ruimte! Planeten trokken en trekken ook aan *elkaar* en 19e eeuwse astronomen hebben daar al flink aan gerekend. De 43 boogseconden per eeuw, die op pagina 66 uitsluitend op het conto van de relativiteit geschoven worden, betreffen in feite een *extra* relativistisch effect *bovenop* het klassieke storingseffect.

- *De Dirac-vergelijking*

Diracs geniale idee om de golfvergelijking te factoriseren in twee 1e orde vergelijkingen door in plaats van een scalarveld een 'spinorveld' te beschouwen had wel gemeld mogen worden. Evenals het feit dat Clifford deze techniek een halve eeuw te voren al uit zijn zuiver wiskundige duim gezogen had!

FIGUUR 1 Elektrozwakke wisselwerking (Glashow-Weinberg-Salam-model)

$$\mathcal{L}_{E\text{-}W}=\mathcal{L}_g+\mathcal{L}_f+\mathcal{L}_H+\mathcal{L}_m$$

$$\mathcal{L}_g=-\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_f=\sum_i\bar{\Psi}_{Li}(i\partial\!\!\!/+g'W\!\!\!\!/\,^a t_a+gB\!\!\!/y)\,\Psi_{Li}$$
$$+\sum\bar{\Psi}_{Ri}(i\partial\!\!\!/+gB\!\!\!/y)_{Ri}$$

$$\mathcal{L}_H=-(D_\nu\phi)^\dagger(D^\nu\phi)-\mu^2(\phi^\dagger\phi)+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

$$\mathcal{L}_m=-\sum_{i,j}(c_{ij}\bar{\Psi}_{Li}\phi\Psi'_{Rj})$$

Over de recensent

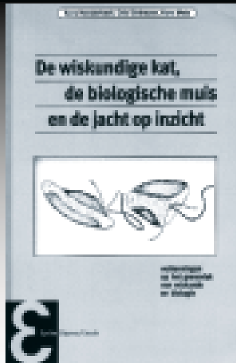
Jan de Graaf is van oorsprong natuurkundige, en is nu hoogleraar Toegepaste Analyse aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hij verzorgt daarbij veel service-onderwijs wiskunde, met name onderwijs aan studenten elektrotechniek en natuurkunde.

E-mailadres: degraaf@win.tue.nl

DE WISKUNDIGE KAT, DE BIOLOGISCHE MUIS EN DE JACHT OP INZICHT

Een boekbespreking

[Ger Limpens]



'De wiskundige kat, de biologische muis en de jacht op inzicht'
Auteur: J.A.P. Heesterbeek e.a.
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2004)
ISBN 90-5041-085-5
224 bladzijden
Prijs: € 21,00

Inleiding

Kat en muis in de titel beloven aandacht voor prooi- en roofdiermodellen. Dat is een belofte die dit boek meer dan waarmaakt.
Gelukkig is daarbij niet alleen aandacht voor het voor docenten wiskunde zo langzamerhand overbekende Lotka-Volterra-model. Ook bijvoorbeeld het model van Nicholson en Bailey - dat in de jaren 30 van de vorige eeuw door de Australiërs waarnaar het model vernoemd is, beschreven werd met als achterliggende gedachte het gastheer-parasietmodel (rupsenlarven en sluipwespen bijvoorbeeld) – komt aan de orde. Bij dit model wordt aan de hand van differentievergelijkingen (in een gekoppeld stelsel van twee recurrente betrekkingen) beschreven hoe de dichtheden van generatie tot generatie van gastheer en parasiet veranderen. Ook dit model overigens is, zo wordt uiteengezet, niet al te realistisch: het veel waargenomen verschijnsel dat roofdieren tijd nodig hebben om prooidieren te consumeren dan wel de realistische veronderstelling dat, ook bij afwezigheid van roofdieren/parasieten, de prooidieren/gastheren niet ongebreideld zullen groeien, zijn terug te vinden in noch het Lotka-Volterra-model noch in het model van Nicholson en Bailey.

Inzoomend

'De wiskundige kat, de biologische muis en de jacht op inzicht' is een bundel verhandelingen van de hand van diverse onderzoekers die zich bezighouden met het bestuderen en modelleren van biologische problemen of met wiskunde die toepasbaar is in de biologie. Zoals de achterflap vermeldt, heeft deze bundel niet de pretentie een volledig beeld te geven van de theoretische en de mathematische biologie zoals die op het ogenblik beoefend wordt, maar wel een representatief beeld. Dat laatste kan ik, vanuit mijn positie, niet beoordelen. Wel kan ik constateren dat ik diverse bijdragen met plezier gelezen heb.
Het boek begint met het hoofdstuk '*Molecuul*' in de vorm van een verhandeling over DNA-computing, waarbij het rekenen met behulp van DNA zowel op theoretische als op praktische basis wordt beschreven. Bij dat theoretische aspect wordt het zogenoemde experiment van Adleman –een eenvoudig soort handelsreizigersprobleem– als illustratie van DNA-rekentechniek gehanteerd.
De volgende hoofdstukken zijn achtereenvolgens:
- '*Cel*' (met aandacht voor diversiteit in immuunsystemen op basis van combinatoriek en kansberekening),
- '*Orgaan*' (waarbij fysiologische regelsystemen bestudeerd worden met kennis uit de meet- en regeltechniek in de vorm van onder andere differentiaalver gelijkingen),
- '*Individu*' (samenleving van organismen en de evolutie van legselgrootte passeren hier de revue, voorzien van wiskundige technieken als matrixrekening respectievelijk differentievergelijkingen die de opeenvolgende populatiegroottes beschrijven),
- '*Populatie*' (gewijd aan de opmars van de Turkse Tortel, gebruik makend van zowel een statistisch als een mechanistisch model, respectievelijk overleven in een versnipperd landschap waarbij ook weer een deterministische maar ook een stochastische modellering plaatsvindt),
- '*Ecosysteem*' (over rupsen, klem zittend tussen boom en vogels, het bestrijden van plaaginsecten, de wiskunde van kat en muis en de concurrentie om een of meer voedingsstoffen, met opnieuw diverse soorten differentiaalvergelijkingen), en tot slot het hoofdstuk
- '*Soorten*', waarbij de indelingssystematiek, die bij biologie vaak van groot belang is, aan een logische studie onderworpen wordt en de verrassende conclusie is dat het zogeheten 'biologische soortbegrip' – de in de biologie meest gebruikte definitie van 'soort' – eigenlijk niet bruikbaar is in de hedendaagse systematische biologie.

Als je de diverse hoofdstukken zo op een rijtje zet, dan zie je dat de ordening van deze bundel min of meer overeenkomt met een uitzoomproces van moleculair niveau, via onder andere celniveau en populatieniveau, naar ecosystematiek, waarna afgesloten wordt met een hoofdstuk op metaniveau over indelingssystematiek. Deze opzet geeft, zoals al aangegeven, veel leesplezier: bij slechts een enkel hoofdstuk geven de verschillende bijdragen een gevoel van meer van hetzelfde. Het overgrote deel van de opstellen bood mij in ieder geval een boeiende kijk in de wereld van de mathematische biologie, een voor mij niet al te bekende wereld.

Een punt van kritiek

Wel verstout ik mij in dit kader een enkele kritische opmerking. Het gevaar van een bundel als deze is, in mijn ogen althans, dat bijdragen voor veel beoogde lezers al snel als erg specialistisch en zelfs hermetisch over kunnen komen. Dat gebeurt hier en daar inderdaad. Een enkel hoofdstuk wordt in mijn beleving erg overheerst door vakjargon waar - in ieder geval ik - niet even eenvoudig overheen kon lezen. Ik denk dan met name aan de bijdrage over het samenleven van organismen. Begrippen als symbiose, herbivoor en carnivoor zijn dan weliswaar bekend, maar al snel passeren ook onder andere auto- en heterotroof, eukaryote cellen en endo-parasitisme de revue, begrippen die voor niet-ingewijden toch een beschrijving behoeven die lang niet altijd gegeven wordt. Tevens blinkt, nu ik me toch de vrijheid van een kritische noot permitteer, dit hoofdstuk uit in onzorgvuldige redactie. Dit hoofdstuk met name kent nogal wat gebrekkige zinsconstructies en type-, c.q. zetfouten. Wat betreft de redactie zou ik zelf trouwens de aanbeveling willen doen om met name in de toekomst bij uitgaven als deze de illustraties zorgvuldiger na te lopen: er zijn nogal wat afbeeldingen in dit boek waarbij de teksttoevoegingen onleesbaar zijn.

Afsluitend

Voornoemde gebreken leveren tijdens lezing irritatie op - die na afloop overigens gelukkig niet overheerst. In mijn ogen levert dit boek een mooi beeld op van wat volgens de ondertitel heet: 'verkenningen op het grensvlak van wiskunde en biologie'. En ongetwijfeld kan dit boek doen wat de samenstellers in de slotzin van hun voorwoord blijken te beogen: '... bij huidige en toekomstige studenten, docenten en onderzoekers, de interesse op te wekken voor de sterk opkomende wetenschappelijk uitdagende, wonderlijke en verrassende samenleving van wiskunde en biologie.'

Over de recensent

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito en p.r.-medewerker van het Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: gerlimpens@wanadoo.nl

NULLEN EN ENEN

Een boekbespreking

[Ernst Lambeck]



'Nullen en Enen' (Zebra 19)
Auteurs: Ruud Jeurissen en Leon van den Broek
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2004)
Prijs voor niet-leden: € 9,00

ISBN

Het ISBN (Internationaal Standaard Boeknummer) van het hier te bespreken Zebraboekje is 90-5014-087-1. Als u de moeite zou nemen om dit te controleren, dan ontdekt u echter dat dit nummer helemaal geen ISBN kan zijn! Voor ieder ISBN geldt dat eerste cijfer maal 10 + tweede cijfer maal 9 + derde cijfer maal 8 + ... + tiende cijfer maal 1 een elfvoud moet zijn. Voor het zojuist gegeven nummer levert deze berekening echter 195, hetgeen geen elfvoud is. Er is dus iets misgegaan. Maar wat?
Enig puzzelen levert dat het nummer 94-5014-087-1 kan zijn geweest, maar ook 60-5014-087-1, of 90-5074-087-1, en zo zijn er nog een aantal mogelijkheden. Even nakijken levert het juiste nummer 90-5041-087-1. Een beetje gehaast typen betekende het verwisselen van twee cijfers. Blijkbaar kun je bij ISBN verschrijvingen wel constateren, maar is niet te achterhalen welke fout er is gemaakt.

De codetheorie houdt zich bezig met het maken van systemen die niet alleen fouten in ontvangen berichten constateren, maar ook verbeteren. Gelukkig slaagt men daar redelijk in, anders konden we nu niet genieten van CD's en DVD's of van foto's van Mars (zie figuur 1).

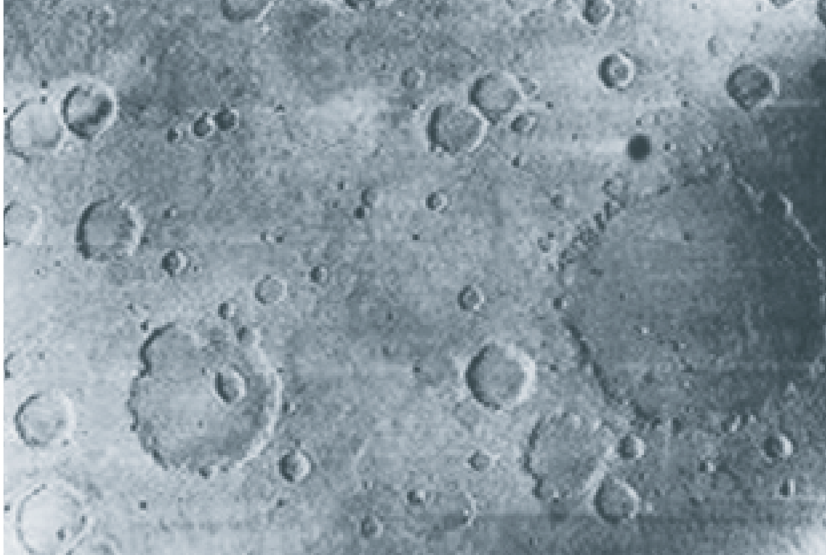
Verkeerde boodschap

Stel je hebt 16 boodschappen. Je kunt deze dan voorstellen door rijtjes van 4 nullen en enen (4 bits). Het zonder meer verzenden van zo'n rijtje (of het lezen van zo'n rijtje door een CD-speler) kan problemen geven. Wat ruis op de lijn of een stofje op de CD leidt dan tot ontvangst van een verkeerd bit: een 0 wordt ontvangen als een 1 of omgekeerd. Je ontvangt dan een verkeerde boodschap. Hoe kun je dat voorkomen? Twee keer de boodschap sturen helpt niet, je krijgt bij zo'n verstoring dan twee verschillende boodschappen, maar welke is nu de goede? Je zou de boodschap drie keer achter elkaar kunnen sturen. Eén kleine verstoring betekent dan één keer een foute ontvangst, maar twee keer de goede. Alleen ben je voor het verzenden dan wel erg veel extra tijd kwijt, of -in het geval van een CD- erg veel ruimte.

Het kan slimmer. We kunnen de boodschappen weergeven met 7 bits zodanig dat elk tweetal boodschappen (of ook wel codewoorden) verschilt in minimaal 3 bits. Ontvangen we nu een verminkte boodschap en gaan we uit van het feit dat het aantal fouten zo klein mogelijk is, dan kunnen we, als er één fout gemaakt wordt, deze opsporen én verbeteren. De verstuurde boodschap wijkt immers maar in één bit af, terwijl alle andere codewoorden in minimaal twee bits afwijken.

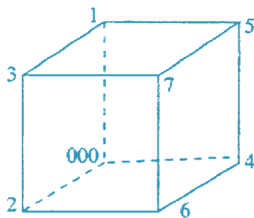
Foutverbeterende codes

In dit Zebraboekje wordt zo'n code als volgt gemaakt. Men neemt een kubus (zie figuur 2), nummert de hoekpunten op een willekeurige manier met 0 t/m 7 en gebruikt voor deze hoekpunten de binaire schrijfwijze (0=000, 1=001, 2=010, ..., 7=111). Vervolgens worden deelverzamelingen van de hoekpunten 1 t/m 7 (in het boekje gebruikt men de term 'greep') omgezet naar een woord van 7 bits (of ook wel een punt van een 7-dimensionale kubus; zie figuur 3). De punten van de genomen greep worden plaatsgewijs opgeteld. Als drie keer een even getal ontstaat, dan is het woord van 7 bits een codewoord. De greep uit figuur 3 blijkt geen codewoord op te leveren; zie figuur 4. De greep 3, 5 en 6 levert wel een codewoord op. Vervolgens wordt aangetoond, soms via opgaven, dat elk tweetal codewoorden in minimaal 3 bits verschilt en dat we op deze manier precies 16 codewoorden vinden.



FIGUUR 1

FIGUUR 2, 3 en 4



nummers	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	1	1	1	1
punten 3-kubus	0	1	1	0	0	1	1
	1	0	1	0	1	0	1
grijp		↑	↑		↑	↑	
punt 7-kubus	0	1	1	0	1	1	0

$$\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} + \begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix} + \begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix} + \begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix} = \begin{matrix}2\\3\\2.\end{matrix}$$

De gemaakte code is een voorbeeld van een zogenaamde Hamming-code $H(3)$. Voor elke gehele $m > 1$ is er zo'n Hamming-code $H(m)$, die op een soortgelijke wijze te maken is als hierboven $H(3)$. Ze bestaat uit 2^{2^m-m-1} codewoorden van 2^m-1 bits. Aan de hand van deze codes wordt in dit boekje ook nog duidelijk gemaakt hoe met matrixvermenigvulding een ontvangen boodschap gemakkelijk kan worden gedecodeerd.

Getalsystemen en codetheorie

'Nullen en enen' bestaat uit twee delen. Het eerste deel behandelt getalsystemen (tientallig, achttallig en tweetallig). Aan de orde komen het omzetten van een schrijfwijze in het ene naar een schrijfwijze in het andere systeem, repeterende breuken en cijfers achter de komma in de diverse systemen. Veel opgaven bieden de leerling de mogelijkheid goed vertrouwd te raken met het werken in verschillende getalsystemen.
Dit deel wordt afgesloten met een hoofdstukje over het tweetallig stelsel, waarna via een hoofdstukje over hyperkubussen wordt overgestapt op het naar mijn smaak veel aardiger tweede deel. Dit deel biedt de leerling een mooie inleiding in de codetheorie. Hierboven hebt u daar iets van kunnen proeven. Aan de hand van veel opgaven kan de leerling zich een goed beeld vormen van deze wiskundige discipline. Ik verwacht dat de leerling dit deel van het boekje meer zal waarderen dan het eerste deel, alleen al omdat het hem of haar een idee geeft waarom een kras op een CD vaak niet te horen is.

Het moge duidelijk zijn dat beide delen los van elkaar door te werken zijn, maar dat het hoofdstukje over het tweetallig stelsel een goed beginpunt kan zijn voor het tweede deel.

Zebradeeltje 19

De auteurs geven aan dat de onderwerpen zich minder leenden voor een stelling-bewijs-aanpak. Zij hebben daarom gekozen voor een verhalende vorm waaruit de leerling zelf de belangrijke punten kan halen.
De bewijzen staan overigens wel degelijk, als een redenering, in het verhaal. Hier en daar zal de leerling even moeten doorbijten, maar over het algemeen is het verhaal goed te volgen, al zou ik een A-leerling dit boekje waarschijnlijk niet voorschotelen.

De eerste 18 delen van de Zebrareeks bieden de leerling een uitgebreide en gevarieerde verzameling keuzeonderwerpen. Dit boekje zorgt voor een mooie uitbreiding van deze verzameling.

Over de recensent

Ernst Lambeck is als docent wiskunde werkzaam aan het Newmancollege te Breda. Daarnaast is hij voorzitter van de opgavencommissie van de Kangoeroe.
E-mailadres: e.lambeck@newmancollege.nl

Opgave 815 Recreatie

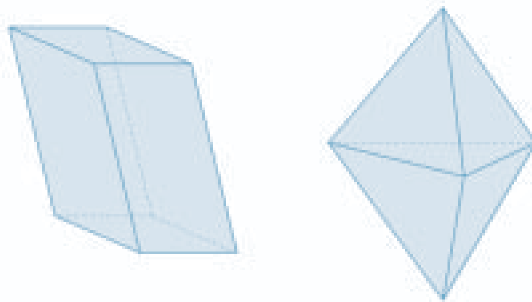
[Frits Göbel]

Puzzel 815
Twee zesvlakken

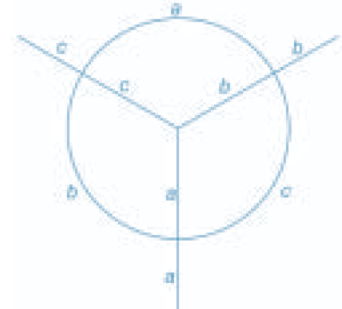
Een scheef blok en een driezijdige dubbelpiramide, ook wel delta-6-vlak genoemd, zijn de in de titel bedoelde veelvlakken (zie figuur 1). Het lijkt er dus op dat de opgaven ruimtelijk inzicht vereisen, maar ze zijn alle drie in de tweede dimensie op te lossen.

Stel we hebben een scheef blok waarvan geen van de zijvlakken een rechthoek is. Dan kan het zijn dat er een hoekpunt is waar drie scherpe hoeken samenkomen. Als dat zo is, dan is er natuurlijk nog zo'n hoekpunt. In ieder van de zes andere hoekpunten komen dan twee stompe hoeken en één scherpe hoek samen. Een dergelijk blok noem ik voor het gemak een spits blok. De enige andere mogelijkheid is een blok met een hoekpunt waar drie stompe hoeken samenkomen. Zo'n blok noem ik een plat blok.

Opgave 1
Aan welke eisen moeten de hoeken en zijden van de zijvlakken voldoen opdat je een spits blok kunt omzetten in een plat blok? De bedoeling is dat de zijvlakken niet van vorm veranderen; het is alleen toegestaan om de zijvlakken anders aan elkaar te zetten, eventueel gespiegeld. Denk maar aan Polydron.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Opgave 2
Dezelfde vraag voor de omzetting van plat blok naar spits blok.
Aanwijzing. Het is misschien handig om eerst de veelvlakken te bestuderen die worden begrensd door zes ruiten. U kunt zich dan helemaal op de hoeken concentreren.

In het delta-6-vlak, dat zoals bekend door zes gelijkzijdige driehoeken wordt begrensd, vervangen we de zijvlakken door willekeurige scherphoekige, maar gelijke driehoeken. Laat de zijdelengten van zo'n driehoek a, b, c zijn met $a < b < c$. Ook van deze zes stukjes is nu een veelvlak te vormen, mits we ook hier toestaan dat de stukjes mogen worden omgedraaid ofwel gespiegeld. Het is zelfs zo dat het maar op één manier kan. In figuur 2 ziet u een soort projectie van ons veelvlak met de zijdelengten erbij gezet. Mocht u een modelletje willen maken, neem dan $(a,b,c) = (6,7,8)$ in een of andere eenheid. U zult dan kunnen vaststellen dat het veelvlak niet convex is. Ik vond dat nogal verrassend.

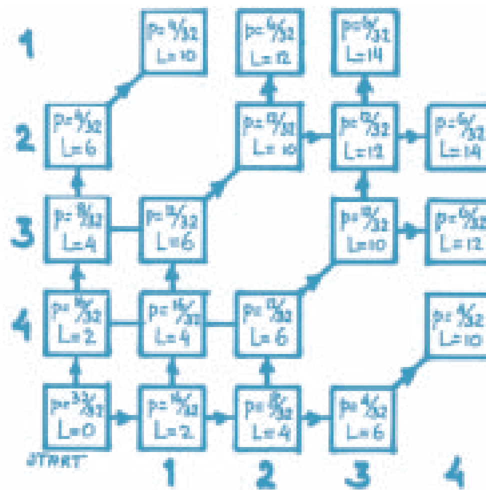
Opgave 3
Voor welke drietallen a, b, c is het onregelmatige veelvlak convex?
In uw antwoord mogen ook hoeken van de driehoek voorkomen.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 24 maart 2006.
Veel plezier!

Oplossing 'Kralenspel'

Ondanks de extra kerstprijs waren er slechts tien oplossers.
Goede oplossingen werden ingestuurd door Ton Kool, Leo van den Raadt, Wobien Doyer, Herm Jan Brascamp, Jan Meerhof, Gerhard Riphagen (nieuw!), Arie Verheul en Lieke de Rooij.

Voor de berekening gebruikten de meeste oplossers een schema van de mogelijke situaties met hun overgangen.
In figuur 3 zien we het schema van Leo van den Raadt voor de verwachte speelduur bij 1234 vs. 4321 in opgave 2.
Wobien Doyer slaagde er in voor opgave 1 een algemene oplossing te vinden, dus voor het geval van twee stapeltjes van n kralen!



FIGUUR 3

Voor degenen die hebben geprobeerd het getal op het wenskaartje te decoderen, en daarin niet zijn geslaagd: het getal 2006 is drie-tallig geschreven met de 'cijfers' 0, 1 en -1.
Dit talstelsel is geïnspireerd op een bekende weegpuzzel[1].
Odette De Meulemeester codeerde 2006 als volgt:
$18 + 5 + 3 + (18 + 5 + 1 + 20) \times 9 \times 5$
en ze schreef erbij: 'Ik hoop dat je ziet waarom ik die getallen gekozen heb.' Ik vond het knap om op die manier tot 2006 te komen.
Herm Jan Brascamp schreef 2006 als
+ = + 0 + +, maar die code kon ik niet kraken!

De maximale winstkans die in *opgave 1* werd gevraagd is 23/32 = 0,71875 bij de volgorde 4123.
De verwachte speelduur in *opgave 2* is 49/4 = 12,25 bij de volgorde 4321 en 105/8 = 13,125 bij 2341.

Ladderstand

De top van de ladder luidt:
L. van den Raadt 344
W. Doyer 322
J. Meerhof 264
T. Kool 251
W. van den Camp 226
H.J. Brascamp 200
A. Verheul 158

De Kerstprijs heb ik toegekend aan de nieuwe oplosser Gerhard Riphagen, die veel werk maakte van de toelichting op zijn oplossing en de vormgeving. De tussentijdse Ladderprijs gaat naar Leo van den Raadt. Beiden van harte gefeliciteerd!

Noot (red.)

[1] Zie bijvoorbeeld Schuh: Wonderlijke Problemen, paragraaf 90.

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*-versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

6	13 april 2006	28 februari 2006
7	26 mei 2006	4 april 20006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

woensdag 8 maart
Docentenconferentie NL&T
Organisatie Platform Bèta Techniek

woensdag 8 maart, op de basisscholen
De Grote Rekendag
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 14 maart
π-dag; de 300e verjaardag van π

do. 16 en vr. 17 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 17 maart, op de scholen
Kangoeroe wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

maandag 20 maart, Utrecht
Wisbaak conferentie: het hoe en waarom van taalgericht reken/wiskundeonderwijs
Organisatie FI en APS

ma. 27 en di. 28 maart, Delft
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en TU Delft

27 maart tm. 23 april
UvA Webklas Wiskunde
Organisatie UvA en HvA

donderdag 20 april
Conferentie Wiskunde en ICT
Organisatie APS en FI

zaterdag 22 april, Utrecht
Conferentie PISA-NL
Organisatie Freudenthal Instituut
Zie de advertentie op pag. 265.

vrijdag 12 mei, Amsterdam
Leve de wiskunde!
Organisatie Kortweg-de Vries Instituut

zaterdag 20 mei, Utrecht
12e HKRWO symposium: Boeken die hun sporen hebben nagelaten
Organisatie Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl



Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische Meetkunde
22. Spelen en Delen

Zie ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

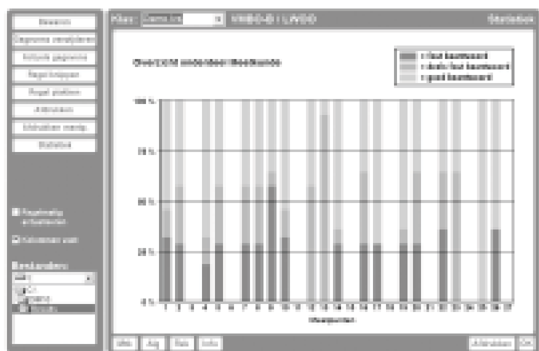
MATRIX

Innovatieve en bruikbare ict

De Digitale Instapmodule van *Matrix*, de nieuwe wiskundemethode van Malmberg, heeft verrassende voordelen:

- **test volledig automatisch kennis van individuele leerling of klas;**
- **biedt remediërende stof toegespitst op leerling;**
- **garandeert aansluiting tussen VO en basisonderwijs;**
- **te gebruiken naast elke wiskundemethode;**
- **vergt slechts 1 lesuur in het computerlokaal;**
- **op maat instelbare meetpunten naar de niveau's: vmbo-b (lwoo), vmbo-kgt, vmbo-t/havo en havo/vwo.**





De *Digitale Instapmodule* van Matrix (DIM) bestaat uit drie onderdelen:

1. Het leerlingprogramma
De *Instaptoets* test de kennis en vaardigheden van de individuele leerling op de 100 meetpunten die essentieel zijn in de overgang van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs bij rekenen/wiskunde. *Uitleg en oefening* wordt automatisch en op maat aangeboden bij de meetpunten waarop de individuele leerling slecht scoort.

2. Het docentenprogramma
Het *Leerling-Volg-Systeem* genereert voor de docent een helder overzicht van individuele en klassikale verschillen in wiskundige kennis en vaardigheden. De eigen les kan daarop worden aangepast.

3. Het setup-programma
Met de *Setup* kan de docent de hele module op maat instellen door per klas, per niveau en per onderdeel de gewenste meetpunten te selecteren. Ook kunnen hier geluidseffecten, wachttijden, wachtwoorden en vele andere instellingen gewijzigd worden.

Bel voor meer informatie: (073) 6 287 554
of kijk op www.matrix-malmberg.nl

Naast de DIM biedt *Matrix* ook complete, interactieve computerlessen voor leerlingen en een PresentatieEditor voor docenten.

Uitgeverij Malmberg ● Postbus 308 ● 5201 AH 's-Hertogenbosch ● T (073) 6 287 554 ● E Klantenservice.vo@malmberg.nl

Malmberg